

شبیه‌ساز کنکور (۱)

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۴	۱۲	۱۴	۱۰	۳	۱۸	۱۹
فیزیک	۸	۹	۱۸	-	۱	۲۸	۶
شیمی	۷	۱۰	۹	۴	۷	۱۶	۷

گزینه ۱-۲

استراتژی اول سعی می‌کنیم گزینه‌ها را ساده‌تر بنویسیم. برای این کار به دنباله گزاره‌هایی می‌گردیم که ارزششان کاملاً معلوم است. بعد از این کار، سیاست حذف گزینه را پیش می‌گیریم؛ یعنی می‌بینیم کدام گزینه ارزشش طبق میل سطرهای جدول نیست. این سیاست را تا جایی ادامه می‌دهیم که سه گزینه حذف شود.

درس‌نامه ۱ جدول ارزش ترکیب گزاره‌ها را در جدول زیر ببینید:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
این گزاره فقط وقتی نادرست می‌شود که هر دو گزاره درست باشند.	این گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.	این گزاره فقط وقتی نادرست است که گزاره اول (p)، درست ولی گزاره دوم (q)، نادرست باشد.

۲ به کمک جدول بالا می‌توانیم به هم‌ارزی‌های زیر برسیم:

$$p \vee \sim p \equiv \text{د}, \quad \text{د} \vee \text{د} \equiv \text{د}, \quad \text{د} \wedge \text{د} \equiv \text{د}, \quad \text{د} \Rightarrow \text{د} \equiv \text{د}$$

خودش

گام ۱ طبق استراتژی، اول گزینه‌ها را ساده می‌کنیم. طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم، گزاره $p \vee \sim p$ در ۲، ۳، ۴ و ۵ همیشه درست است؛ پس این گزینه‌ها را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم:

۲ ساده‌سازی $[(p \vee \sim p) \vee (q \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \Rightarrow [\sim r \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))]$

۳ ساده‌سازی $\Rightarrow \Rightarrow [\sim r \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))] \equiv [\sim r \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))]$

$[(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r))] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$

$\sim q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

$\Rightarrow [\sim q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$

۴ ساده‌سازی $[(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee \sim p) \wedge (q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r))]$

$(q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r))$

$\Rightarrow [(p \Rightarrow \sim r) \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r))$

گام ۲ حالا شروع به حذف گزینه‌ها می‌کنیم. سطر اول جدول می‌گوید، وقتی هر سه گزاره p، q و r درست باشند، باید X هم درست شود. ببینیم در کدام گزینه چنین اتفاقی نمی‌افتد:

۱ $\sim p \vee ((p \Rightarrow r) \wedge r) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow q) \wedge \sim (p \wedge \sim q)]$

$\Rightarrow [\text{د} \vee (\text{د} \wedge \text{د})] \Rightarrow [(\text{د} \Rightarrow \text{د}) \wedge \text{د}] \equiv \text{د} \checkmark$

ریاضیات

گزینه ۱-۱

درس‌نامه ۱ اگر a، b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، می‌توانیم رابطه مقابل را برایشان بنویسیم: $a + c = 2b$ یا وسطی $2 \times$ = سومی + اولی

و در صورتی که a، b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، می‌توانیم بنویسیم:

۲ در دنیای لگاریتم‌ها چند قانون مهم زیر برقرار است:

الف لگاریتم، توانی را که روی عبارت جلوی نشسته باشد، به عنوان ضریب به پشت خودش منتقل می‌کند؛ یعنی:

$\log_b a^m = m \log_b a$

ب در تقسیم دو لگاریتم با مبنای یکسان، این‌طوری عمل می‌کنیم:

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

پ جمع و تفریق دو لگاریتم با مبنای یکسان، به صورت زیر انجام می‌شود:

$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ ، $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

ت فرض کنید می‌خواهیم مبنای $\log_a b$ را به عدد دیگری مثل k تبدیل کنیم؛ برای چنین کاری:

۱ اول $\log_a b$ را در $\log_k k$ ضرب می‌کنیم (چون $\log_k k = 1$ است، انگار $\log_a b$ را در ۱ ضرب کرده‌ایم):

$\log_a b \times \log_k k$

۲ حالا به $\log_a b$ به چشم ضریب پشت $\log_k k$ نگاه کنید. طبق قانون (الف)، این ضریب می‌تواند به عنوان توان، روی k بنشیند:

$\log_a b \times \log_k k = \log_k k^{(\log_a b)}$

ث $\log_a \square = \log_a \bigcirc \Rightarrow \square = \bigcirc$

گام ۱ به گفته سؤال a، b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی‌اند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$ab = c^2$ (*) $\Rightarrow ab = c^2$ (وسطی) = سومی $\times$ اولی

گام ۲ چون $f(x) = \log x$ است؛ پس:

$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{\log a}$ ، $\frac{1}{f(b)} = \frac{1}{\log b}$ ، $\frac{1}{f(c)} = \frac{1}{\log c}$

سؤال می‌گوید، $\frac{1}{f(a)}$ ، $\frac{1}{f(b)}$ و $\frac{1}{f(c)}$ ، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی‌اند؛ پس حق داریم بنویسیم:

$\frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log c} = \frac{2}{\log b}$

گام ۳ طرفین تساوی بالا را در $\log b$ ضرب می‌کنیم:

$\frac{\log b}{\log a} + \frac{\log b}{\log c} = 2$

طبق قانون (ب) درس‌نامه به جای $\frac{\log b}{\log a}$ و $\frac{\log b}{\log c}$ می‌توانیم به ترتیب $\log_a b$ و $\log_c b$ بنویسیم:

گام ۴ طبق قوانین (الف) و (ت) می‌توانیم به جای $\log_c c^2$ و به جای $\log_a b$ از $\log_c c^{(\log_a b)}$ استفاده کنیم تا همه مبنای یکسان بشوند:

$\log_c c^{(\log_a b)} + \log_c b = \log_c c^2 \xrightarrow{\text{قانون پ}} \log_c b \times c^{(\log_a b)} = \log_c c^2$

در تساوی بالا مبنای لگاریتم‌ها یکسان است؛ پس طبق قانون (ث) داریم:

$b \times c^{\log_a b} = c^2$

گام ۵ طبق (*) به جای c^2 در تساوی بالا می‌توانیم بنویسیم ab:

$b \times c^{\log_a b} = ab \Rightarrow a = c^{\log_a b}$

مشاوره قسمت (ت) درس‌نامه نگاهی نسبتاً جدید به لگاریتم‌ها دارد؛ لطفاً بخوانید.



گام ۷ حالا ارتفاع و قاعده مثلث رنگی بالا را داریم. می‌توانیم مساحتش را حساب کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times SH = \frac{1}{2} \times (4-1) \times \frac{9}{4} = \frac{27}{8} = 3 \frac{3}{8}$$



گزینه ۴

شفاف‌سازی سهمی $y = ax^2 - x + a$ از محور x و تری به طول a جدا می‌کند. یعنی اختلاف ریشه‌های معادله $ax^2 - x + a = 0$ مساوی a است.

درس‌نامه اختلاف ریشه‌های معادله $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ ، از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|} \quad \text{اختلاف ریشه‌ها}$$

گام ۶ طبق شفاف‌سازی باید اختلاف ریشه‌های معادله $ax^2 - x + a = 0$ را مساوی a بگذاریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|} = a \Rightarrow \frac{\sqrt{(-1)^2 - 4(a)(a)}}{|a|} = a \Rightarrow \frac{\sqrt{1-4a^2}}{|a|} = a$$

a طول وتر است؛ پس قطعاً عدد مثبت هست. به همین خاطر در تساوی بالا جای $|a|$ همان a را می‌نویسیم:

$$\frac{\sqrt{1-4a^2}}{a} = a \Rightarrow \sqrt{1-4a^2} = a^2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1-4a^2 = a^4$$

$$\Rightarrow a^4 + 4a^2 - 1 = 0$$

گام ۷ فرض می‌کنیم $a^2 = t$ باشد، این‌جوری $a^4 = t^2$ و در نتیجه معادله بالا به صورت $t^2 + 4t - 1 = 0$ درمی‌آید.

این معادله را به کمک Δ حل می‌کنیم:

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 - \sqrt{5} \\ t = -2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

گام ۸ حالا جای‌های a های بالا می‌نویسیم a^2 :

$$\begin{cases} a^2 = -2 - \sqrt{5} & \times \\ a^2 = -2 + \sqrt{5} & \checkmark \end{cases}$$

توان دوم یک عدد که نمی‌تواند منفی باشد، پس فقط $a^2 = -2 + \sqrt{5}$ را می‌پذیریم.

گام ۹ سؤال $[2a^2]$ را می‌خواهد که می‌شود:

$$[2(\sqrt{5}-2)] = [0.4] = 0$$



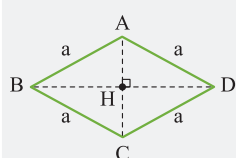
گزینه ۵

استراتژی اول مختصات رأس‌های A و C را به دست می‌آوریم؛ بعد مساحت مثلث OAC را حساب می‌کنیم. در آخر با توجه به این‌که قطر هر لوزی، آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند، مساحت لوزی را پیدا می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ اگر نقطه‌ای مثل A روی تابع $y = f(x)$ باشد، می‌توانیم مختصات پارامتری آن را به صورت $A(\alpha, f(\alpha))$ در نظر بگیریم. مثلاً اگر نقطه A روی $y = 2x$ قرار داشته باشد، می‌توانیم بگوییم مختصات پارامتری‌اش به صورت $A(\alpha, 2\alpha)$ است.

۲ مساحت مثلث با رأس‌های $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}$$



۳ در لوزی، ضلع‌ها برابر و قطر‌ها عمودمنصف همدیگرند، این یعنی در لوزی روبه‌رو، H وسط قطرهای AC و BD است.

۴ قطر هر لوزی، آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند؛ یعنی در لوزی بالا می‌توانیم بگوییم:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} \text{ یا } 2S_{ADC} \text{ یا } 2S_{ABD} \text{ یا } 2S_{BCD}$$

$$[\sim r \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))] \equiv [n \wedge (d \Rightarrow d)] \equiv n \quad \times$$



همین‌جا $\sim$ را حذف می‌کنیم.

$$[\sim q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)] \equiv [(n \Rightarrow n) \Rightarrow (d \vee d)] \equiv d \quad \checkmark$$



$$[(p \Rightarrow \sim r) \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)) \equiv [(n \vee n) \Rightarrow (d \Rightarrow d)] \equiv n \quad \times$$



پس $\sim$ هم حذف شد.

گام ۷ در ادامه اگر سطر دوم را کنترل کنیم؛ $\sim$ هم حذف می‌شود. این سطر می‌گوید اگر p و q درست ولی r نادرست باشد؛ x باید درست شود که چنین اتفاقی برای $\sim$ نمی‌افتد:

$$[\sim q \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$$



$$\equiv [n \Rightarrow (d \Rightarrow d)] \Rightarrow [n \vee n] \equiv n \quad \times$$

پس تنها گزینه باقی‌مانده؛ یعنی $\sim$ جواب است.

مشاوره سر جلسه کنکور برای بار اول باید از این سؤال رد شوید، چون هم بسیار وقت‌گیر و هم احتمال اشتباه‌کردن زیاد است.



گزینه ۳

شفاف‌سازی α و β صفرهای سهمی $y = x^2 - (\alpha + 4)x + (\beta - 2)^2$ هستند. یعنی α و β ریشه‌های معادله $x^2 - (\alpha + 4)x + (\beta - 2)^2 = 0$ هستند.

درس‌نامه ۱ جمع و ضرب ریشه‌های معادله $Ax^2 + Bx + C = 0$ ، به شرط $\Delta > 0$ ، از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$P = \frac{C}{A} \text{ ضرب ریشه‌ها و } S = -\frac{B}{A} \text{ جمع ریشه‌ها}$$

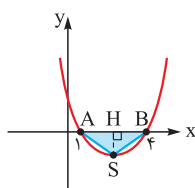
۲ مختصات رأس سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ ، به صورت $S(-\frac{B}{2A}, -\frac{\Delta}{4A})$ است.

۳ در سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ ، اگر ضریب x^2 یعنی A مثبت باشد، دهانه سهمی رو به بالا و اگر منفی باشد، دهانه سهمی رو به پایین است.

گام ۶ برای محاسبه α و β ، فرمول جمع و ضرب ریشه‌ها را طبق مورد (۱) درس‌نامه، برای معادله $x^2 - (\alpha + 4)x + (\beta - 2)^2 = 0$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{جمع} \\ \alpha + \beta = -\frac{B}{A} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{-(\alpha + 4)}{1} \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha + 4 \Rightarrow \beta = 4 \\ \text{ضرب} \\ \alpha\beta = \frac{C}{A} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{(\beta - 2)^2}{1} \xrightarrow{\beta=4} 4\alpha = (4-2)^2 \\ \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

به ازای $\alpha = 1$ و $\beta = 4$ ، ضابطه سهمی $y = x^2 - (\alpha + 4)x + (\beta - 2)^2$ به این صورت درمی‌آید:



گام ۷ ضریب x^2 در سهمی بالا عدد مثبت ۱ است؛ پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، دهانه‌اش رو به بالا است. ریشه‌هایش هم که دیدیم ۱ و ۴ است؛ بنابراین نمودارش به این صورت می‌شود:

گام ۸ به دنبال مساحت مثلث رنگی ASB هستیم. طول قاعده‌اش که $4-1=3$ ولی ارتفاع SH را نداریم. همان قدرمطلق عرض سهمی $y = x^2 - 5x + 4$ است که طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌شود:

$$SH = \left| -\frac{\Delta}{4A} \right| = \left| -\frac{(-5)^2 - 4(1)(4)}{4(1)} \right| = \left| -\frac{9}{4} \right| = \frac{9}{4}$$

آن صدق کند. حالا طبق مورد (۲) درس‌نامه، دلتای عبارت $bx^2 - (2b+1)x + 5b + 1$ را مساوی صفر می‌گذاریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2b+1)^2 - 4b(5b+1) = 0 \Rightarrow 4b^2 + 4b + 1 - 20b^2 - 4b = 0$$

$$\Rightarrow 16b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

گام ۳ $b = \frac{1}{4}$ (ضریب x^2) قابل قبول است، چون طبق (*)، عبارت

$$bx^2 - (2b+1)x + 5b + 1 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{4} > 0 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 10x + 9 > 0$$

جای‌گذاری می‌کنیم: $x^2 - 10x + 9 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-9) > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > 9$

$$\Rightarrow (x-3)^2 > 0 \Rightarrow a = 3$$

$$a - b = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2.75$$

بنابراین $a - b$ می‌شود:

۷- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ همیشه $0 \leq x - [x] < 1$ است.

۲ اگر درون جزء صحیح عددی صحیح جمع یا منها شده باشد، حق داریم آن را از جزء صحیح بیرون بیاوریم؟ این یعنی اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، همان $[x \pm a] = [x] \pm a$ است.

گام ۱ بیا فرض کنیم $x - [x] = t$ باشد. در این صورت تساوی $[x](x - [x]) = 100$

$$[x]t = 100 \quad (*)$$

به این صورت درمی‌آید:

که طبق مورد (۱) درس‌نامه، $0 \leq t < 1$ است.

گام ۲ از تساوی $x - [x] = t$ نتیجه می‌گیریم که $x = [x] + t$. طرفین این تساوی را

$$x^2 = ([x] + t)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = [x]^2 + 2[x]t + t^2 \Rightarrow x^2 = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

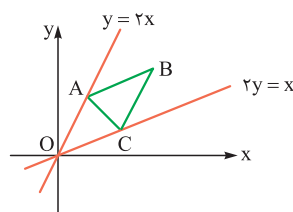
$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$

$$[x^2] = [x]^2 + 200 + t^2$$



گام ۱ به گفته سؤال، طول نقطه A برابر ۴ است. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید؛ این نقطه روی خط $y = 2x$ قرار دارد؛ پس عرضش می‌شود:

$$y = 2x \xrightarrow{x=4} y = 2(4) = 8$$

بنابراین مختصات نقطه A به صورت $A(4, 8)$ می‌شود.

نکته فاصله نقطه $A(a, b)$ از مبدأ مختصات، برابر می‌شود با:

$$OA = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

طبق نکته بالا طول ضلع لوزی می‌شود:

گام ۲ خط $y = x$ را به صورت $y = \frac{x}{2}$ می‌نویسیم. نقطه C روی این خط قرار دارد، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم مختصات پارامتری‌اش را به صورت $C(\alpha, \frac{\alpha}{2})$ در

نظر بگیریم. در گام قبل دیدیم که طول ضلع لوزی $\sqrt{80}$ شد؛ پس فاصله $C(\alpha, \frac{\alpha}{2})$ از مبدأ مختصات هم باید $\sqrt{80}$ باشد:

$$OC = \sqrt{80} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (\frac{\alpha}{2})^2} = \sqrt{80} \Rightarrow \frac{5}{4}\alpha^2 = 80 \Rightarrow \alpha^2 = 64 \Rightarrow \alpha = \pm 8$$

این‌جا باید حواسمان باشد که α مناسب را انتخاب کنیم. طبق شکل گام (۱)، C در ناحیه اول است، پس $\alpha > 0$ و نتیجه $\alpha = 8$ می‌شود؛ بنابراین مختصات نقطه C $C(8, 4)$

$$C(8, 4) = (8, 4)$$

گام ۳ حالا که مختصات رأس‌های مثلث OAC را داریم، می‌توانیم مساحتش را به کمک

مورد (۲) درس‌نامه به دست بیاوریم:

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_O & x_A & x_C \\ y_O & y_A & y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (4 - 4) = 0$$

طبق مورد (۴) درس‌نامه، مساحت لوزی دو برابر مساحت مثلث OAC است، پس:

$$S_{\text{لوزی}} = 2S_{OAC} = 2 \times 24 = 48$$

۶- گزینه ۴

شفاف‌سازی نمودار تابع « $y = \frac{x-1}{x^2-2x+5}$ » زیر خط $y = b$ است؛ یعنی:

$$\frac{x-1}{x^2-2x+5} < b$$

درس‌نامه ۱ در عبارت‌های به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ ، هر وقت $\Delta = b^2 - 4ac$

منفی شد؛ می‌توانیم بگوییم این عبارت با ضریب x^2 یعنی a ، هم‌علامت است. **۲** معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرطی ریشه مضاعف دارد که $\Delta = 0$ باشد.

گام ۱ نمودار تابع $y = \frac{x-1}{x^2-2x+5}$ به ازای همه x ‌های به جز a ، پایین‌تر از خط $y = b$

$$\frac{x-1}{x^2-2x+5} < b$$

است؛ پس به ازای $x \neq a$ داریم:

$$x^2 - 2x + 5 > 0$$

چون دلتای آن منفی و > 0 ضریب x^2 ؛ پس

$$(x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$$

به ازای $\{a\} - \mathbb{R}$ نامعادله داده‌شده درست است؛ پس عبارت درجه دوم باید به

صورت مربع کامل (دارای ریشه مضاعف) $(x-a)^2 > 0$ باشد تا همه اعداد، به جز $x = a$ در

در شکل بالا α یک زاویه حاده است؛ پس مقدار مثبت $\sin \alpha$ را می‌پذیریم: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

گام ۳ حالا برای زاویه α در مثل قائم‌الزاویه $AH'D$ ، سینوس می‌نویسیم:

$$\sin \alpha = \frac{AH'}{AD} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{AH'}{10} \Rightarrow AH' = 8$$

الان می‌توانیم طول $H'D$ را به کمک فیثاغورس در مثل $AH'D$ به دست بیاوریم:

$$AH'^2 + H'D^2 = AD^2 \Rightarrow 8^2 + H'D^2 = 10^2 \Rightarrow H'D^2 = 36 \Rightarrow H'D = 6$$

گام ۴ در مستطیل $ABHH'$ ضلع‌های مقابل به هم مساوی‌اند؛ پس:

$$HH' = AB = 6 \text{ و } BH = AH' = 8$$

از قاعده CD ، طول HH' و $H'D$ را کم می‌کنیم تا به طول CH برسیم:

$$CH = CD - (HH' + H'D) = 17 - (6 + 6) \Rightarrow CH = 5$$

گام ۵ حالا خوب به مثلث قائم‌الزاویه BHC نگاه کنید. ضلع مجاور و مقابل به زاویه β $BH=8$ و $CH=5$

را داریم؛ پس می‌توانیم $\cot \beta$ را به کمک مورد (۱) درس‌نامه حساب کنیم:

$$\cot \beta = \frac{CH}{BH} = \frac{5}{8}$$

۱۱- گزینه ۲

درس‌نامه اتحادهای مقدماتی زیر را بلد باشید:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ یا } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \text{ یا } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

گام ۱ سعی می‌کنیم صورت و مخرج کسر اول یعنی $\frac{\cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha}$ را برحسب

$\sin \alpha$ بنویسیم. برای این کار به جای $\cos^2 \alpha$ می‌نویسیم $1 - \sin^2 \alpha$ و به جای $\cos^4 \alpha$ می‌نویسیم $(1 - \sin^2 \alpha)^2$:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha)^2} = \frac{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha)}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1}{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1} = 1$$

گام ۲ کسردوم، یعنی $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}$ هم، معکوس کسر بالاست؛ پس این کسر هم مساوی ۱

است. پس خواسته سؤال می‌شود: $\frac{\cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = 1 + 1 = 2$

تیزبازی بیایید به جای α بگذاریم 0° :

$$A = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}$$

$$\frac{\cos^2 0^\circ + \sin^4 0^\circ}{\sin^2 0^\circ + \cos^4 0^\circ} + \frac{\sin^2 0^\circ + \cos^4 0^\circ}{\cos^2 0^\circ + \sin^4 0^\circ}$$

با توجه به این که $\sin 0^\circ = 0$ و $\cos 0^\circ = 1$: $A = \frac{1+0}{0+1} + \frac{0+1}{1+0} = 1+1=2$

تنها گزینه‌ای هم که به ازای $\alpha = 0^\circ$ برابر ۲ می‌شود همان (۲) است.

۱۲- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ اتحادهای مقدماتی زیر را بلد باشید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{array} \right.$$

۲ به کمک اتحادهای زیر می‌توانیم توان ۲ در $\sin^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha$ را از بین ببریم:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad , \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

۳ برای ساده‌کردن نسبت‌های مثلثاتی، سه قانون زیر را بلد باشید:

الف) در تمام نسبت‌های مثلثاتی، می‌توانیم هر مضرب زوج دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.

این‌جا باید حواسمان باشد که $x = 0$ ریشهٔ معادلهٔ کسرها $\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ و $\frac{a + 4}{x}$ است؛

پس با این که به ازای $a = 4$ به جواب صحیح $x = 0$ می‌رسیم، ولی این جواب قابل قبول نیست.

گام ۲ از بین ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ هم فقط به ازای $a = 5$ به x صحیح رسیدیم. ببینید:

$$x^2 = a^2 - 16 \Rightarrow x^2 = 5^2 - 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$x = 0$ نشد، اما باید حواسمان باشد که در معادله $\sqrt{a+x}$ و $\sqrt{a-x}$ داشتیم. زیرشان نباید منفی شود.

به ازای $(a, x) = (5, -3)$ و همین‌طور $(a, x) = (5, 3)$ زیر هر دو رادیکال $\sqrt{a-x}$ و $\sqrt{a+x}$ عددی مثبت است؛ پس فقط به ازای یک مقدار a ، معادله جواب صحیح دارد.

۹- گزینه ۳

شفاف‌سازی اگر طول نقطهٔ برخورد نمودار $y = f^{-1} \circ \log(x)$ با خط $y = x - 4$ برابر a باشد، یعنی $f^{-1}(g(a)) = a - 4$ است.

درس‌نامه در تابع وارون‌پذیر f ، اگر $f(a) = b$ باشد، می‌توانیم بنویسیم $f^{-1}(b) = a$ و برعکس:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

گام ۱ طبق شفاف‌سازی و درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$f^{-1}(g(a)) = a - 4 \Rightarrow f(a - 4) = g(a)$$

گام ۲ حالا با توجه به این که $f(x) = 7 + \sqrt{x + 5 - a}$ و $g(x) = x + \sqrt{2x - 1}$ است، تساوی بالا به این صورت درمی‌آید:

$$7 + \sqrt{(a-4)+5-a} = a + \sqrt{2(a)-1} \Rightarrow 8 = a + \sqrt{2a-1} \quad (*)$$

گام ۳ برای حل معادلهٔ (*) اول رادیکال را تنها می‌کنیم، بعد طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{2a-1} = 8-a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a-1 = 64-16a+a^2 \Rightarrow a^2-18a+65=0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a-13)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \checkmark \\ a=13 \times \end{cases}$$

$a = 13$ در معادلهٔ (*) صدق نمی‌کند، پس $a = 5$ قابل قبول است.

۱۰- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ نسبت‌های مثلثاتی برای زاویهٔ α در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل را به این

صورت می‌نویسیم:

$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AH}{AB} \quad \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{BH}{AB}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AH}{BH} \quad \cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{BH}{AH}$$

۲ دوتا اتحاد مقابل را بلد باشید: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

گام ۱ اول مطابق شکل، ارتفاع‌های AH' و BH را می‌کشیم.

تا یک مستطیل و دوتا مثلث قائم‌الزاویه درست بشود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AH'D$ طول وتر AD را داریم، اما $\sin \alpha$ یا $\cos \alpha$ را نداریم که ازش استفاده کنیم؛ پس اول $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ را

در $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به $\sin \alpha$ برسیم:

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

گام ۴ $\cos(\frac{3\pi}{4} - 1 \circ x)$ را به کمک موارد (۳) و (۴) درس‌نامه، ساده می‌کنیم:

$$\cos(\frac{3\pi}{4} - 1 \circ x) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4} - 1 \circ x) = -\cos(\frac{\pi}{4} - 1 \circ x) = -\sin(1 \circ x)$$

مضرب فرد π

پس به جای $\cos(\frac{3\pi}{4} - 1 \circ x)$ در رابطه (**) می‌نویسیم:

گام ۵ دوباره به نمودار $f(x)$ نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید: نمودار $f(x)$ در $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ حفره دارد، پس طبق مورد (۵) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\left(\frac{a}{4} + c \right) + \frac{a}{4} \sin(1 \circ x) \right] = -2 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \left[\left(\frac{a}{4} + c \right) + \frac{a}{4} \sin(1 \circ x) \right] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{4} + c \right) + \frac{a}{4} \sin(\frac{\pi}{4}) = -2 \Rightarrow \frac{a}{4} + c + \frac{a}{4} = -2 \\ \left(\frac{a}{4} + c \right) + \frac{a}{4} \sin(\frac{3\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} + c - \frac{a}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = -2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -3$$

بنابراین $ab = (-3)(5) = -15$ می‌شود.

۱۳- گزینه ۳

معادله	فرم کلی جواب
$\sin x = \sin \alpha$	$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$
$\cos x = \cos \alpha$	$x = 2k\pi \pm \alpha$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = k\pi + \alpha$

۲ برای $\sin 2x$ ، اتحادهای زیر را بلد باشید:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{یا} \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

۳ اگر $a^b = c$ باشد، به این صورت می‌توانیم توان، یعنی b را تنها کنیم:

۴ در نامعادله‌هایی مثل $A < \log_a b < B$ ، هر وقت محدوده b را می‌خواستید، اول به a نگاه کنید:

♦ اگر $a > 1$ بود، بدون تغییر جهت نامساوی اول، بنویسید:

$$a^A < b < a^B$$

♦ اگر $0 < a < 1$ بود، با تغییر جهت نامساوی اول، بنویسید:

$$a^A > b > a^B$$

۵ در همه نسبت‌های مثلثاتی می‌توانیم مضارب زوج π را حذف کنیم.

گام ۵ طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \sin(2^{x-2}) \cos(2^{x-2}) = \frac{\sin(2 \times 2^{x-2})}{2} = \frac{\sin(2^{x-1})}{2} \\ \sin(2^x) = \sin(2 \times 2^{x-1}) = 2 \sin(2^{x-1}) \cos(2^{x-1}) \end{cases}$$

گام ۶ حالا موارد بالا را در تساوی $\frac{\sin(2^x)}{\sin(2^{x-2}) \cos(2^{x-2})} = 2\sqrt{3}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{2 \sin(2^{x-1}) \cos(2^{x-1})}{\frac{\sin(2^{x-1})}{2} \cos(2^{x-2})} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{4 \sin(2^{x-1}) \cos(2^{x-1})}{\sin(2^{x-1}) \cos(2^{x-2})} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos(2^{x-1}) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(2^{x-1}) = \cos(\frac{\pi}{6})$$

جواب‌های معادله بالا هم طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌شود:

$$2^{x-1} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (*)$$

ب در $\tan$ و $\cot$ می‌توانیم هر مضرب دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.

پ در $\sin$ و $\cos$ اگر مضرب فردی از π را اضافه یا کم کنیم، نسبتمان، قرینه می‌شود.

۴ نسبت‌های مثلثاتی « $\frac{\pi}{4} - \alpha$ » را در جدول زیر ببینید:

$\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cot \alpha$
$\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sin \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \tan \alpha$

۵ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید: نمودار تابع $f(x)$ در $x = a$ حفره دارد. در چنین حالتی می‌توانیم بگوییم:

الف $f(x)$ در $x = a$ تعریف نشده است.

ب حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ مساوی b است؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

گام ۶ تابع $f(x) = \frac{a}{1 + \frac{1}{\tan^2(\frac{3\pi}{4} - bx)}} + c$ دو جا تعریف نشده است، یکی جاهایی که $\tan(\frac{3\pi}{4} - bx)$ صفر باشد و دیگری جاهایی که خود $\tan(\frac{3\pi}{4} - bx)$ تعریف نشده باشد. حالا می‌توانیم بگوییم، در x هایی که «تعریف نشده یا $\tan(\frac{3\pi}{4} - bx) = 0$ » است، $f(x)$ تعریف نشده می‌شود.

همان‌طور که در نمودار مقابل می‌بینید: $f(x)$ در $x = \frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است؛ پس:

$$\tan(\frac{3\pi}{4} - b(\frac{\pi}{2})) = 0 \quad (۱)$$

نکته $\tan A$ در مضارب صحیح $\frac{\pi}{4}$ ، یا صفر است یا تعریف نشده؛ یعنی:

$$A = k\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan A = 0 \quad \text{تعریف نشده یا}$$

طبق نکته بالا از تساوی (۱)، نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi b}{2} = k\frac{\pi}{4} \xrightarrow{+ \frac{\pi b}{2}} \frac{3}{4} - \frac{b}{2} = \frac{k}{4} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{3}{4} - \frac{k}{4} \xrightarrow{\times 2} b = \frac{3}{2} - \frac{k}{2}$$

$\frac{3}{2} < b < \frac{5}{2} \Rightarrow b = 2$

پس ضابطه $f(x)$ به این صورت می‌شود:

$$f(x) = \frac{a}{1 + \frac{1}{\tan^2(\frac{3\pi}{4} - 2x)}} + c$$

گام ۷ با تابع خیلی شلوغی طرفیم. ساده‌سازی را با تبدیل $\tan$ به $\cot$ شروع می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{a}{1 + \frac{1}{\tan^2(\frac{3\pi}{4} - 2x)}} + c = \frac{a}{1 + \cot^2(\frac{3\pi}{4} - 2x)} + c$$

در ادامه به کمک اتحادی که در مورد (۱-ب) درس‌نامه گفتیم: $\frac{1}{\sin^2} = 1 + \cot^2$ را به $\frac{1}{\sin^2}$ تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{a}{1 + \cot^2(\frac{3\pi}{4} - 2x)} + c = \frac{a}{\sin^2(\frac{3\pi}{4} - 2x)} + c$$

$$\Rightarrow f(x) = a \sin^2(\frac{3\pi}{4} - 2x) + c \quad (*)$$

بیاید در اتحاد $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ به جای α بنویسیم $\frac{3\pi}{4} - 2x$:

$$\sin^2(\frac{3\pi}{4} - 2x) = \frac{1 - \cos(2(\frac{3\pi}{4} - 2x))}{2} = \frac{1 - \cos(\frac{3\pi}{2} - 4x)}{2}$$

حالا تساوی بالا را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x) = a \left(\frac{1 - \cos(\frac{3\pi}{2} - 4x)}{2} \right) + c \Rightarrow f(x) = \left(\frac{a}{2} + c \right) - \frac{a}{2} \cos(\frac{3\pi}{2} - 4x) \quad (**)$$

گام ۷ به گفته سؤال دو تساوی $\lim_{x \rightarrow 21} f(x) = 21$ و $\lim_{x \rightarrow 19} f(x) = 19$ برقرارند؛ پس:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 21} \frac{ax+b}{cx-a} = 21 \Rightarrow \frac{21a+b}{21c-a} = 21 \Rightarrow 21a+b = 21^2c - 21a \\ \lim_{x \rightarrow 19} \frac{ax+b}{cx-a} = 19 \Rightarrow \frac{19a+b}{19c-a} = 19 \Rightarrow 19a+b = 19^2c - 19a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 42a+b = 21^2c & (1) \\ 38a+b = 19^2c & (2) \end{cases}$$

تساوی بالایی را منهای پایینی می‌کنیم:

$$4a = 21^2c - 19^2c \Rightarrow 4a = (21^2 - 19^2)c$$

$$\Rightarrow a = \frac{(21-19)(21+19)c}{4} \Rightarrow a = 20c$$

حالا $a = 20c$ را در تساوی (۱) جای گذاری می‌کنیم تا b هم بر حسب c پیدا شود:

$$42(20c) + b = 21^2c \Rightarrow 840c + b = 441c \Rightarrow b = -399c$$

تا این‌جا ضابطه $f(x)$ به این صورت شد:

$$f(x) = \frac{(20c)x - 399c}{cx - 20c} \xrightarrow{\div c} f(x) = \frac{20x - 399}{x - 20}$$

گام ۸ با توجه به این‌که $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ است، ضابطه $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x - 20}{20x - 399}$$

$g(x)$ هم یک تابع هموگرافیک شد؛ پس برای پیدا کردن وارونش کافی است جای ۱ و -399

را عوض و جفتشان را قرینه کنیم:

$$g^{-1}(x) = \frac{399x - 20}{20x - 1}$$

گام ۹ حالا که ضابطه f و g^{-1} را داریم می‌توانیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{f(x)}$ را حساب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{f(x)} = \frac{399x - 20}{20x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(399x - 20)(x - 20)}{(20x - 1)(20x - 399)} = \frac{399 \times 25}{400 \times 25} = \frac{9975}{10000} = \frac{9975}{10000}$$

طبق هم‌ارزی پرتوان، بزرگ‌ترین توان x را نگه می‌داریم و بقیه جملات را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(399x - 20)(x - 20)}{(20x - 1)(20x - 399)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{399x \times 25}{400 \times 25} = \frac{9975}{10000} = \frac{9975}{10000}$$

۱۶- گزینه ۲

استراتژی حد چپ و راست و مقدار تابع در $x = 0$ را مساوی هم بگذارید.

درس‌نامه ۱ تابع $y = f(x)$ در $x = a$ به شرطی پیوسته است که حد چپ و

راست و مقدارش در $x = a$ برابر باشند؛ یعنی: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

۲ اگر $u \rightarrow 0$ داریم: $\sin u \sim u$

۳ اگر $x \rightarrow 0$ داریم: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x \sim a_1 x$

گام ۱ طبق مورد (۱) درس‌نامه، شرط پیوستگی در $x = 0$ این است که:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad (*)$$

گام ۲ حالا $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $f(0)$ را جدا جدا حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([2+x] + b[x-2]) = [2+0^-] + b[0^- - 2] = 1 - 3b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \sin 2x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a(2x)}{-x} = -2a$$

$$f(0) = [2+0] + b[0-2] = 2 - 2b$$

گام ۳ چیزهایی را که در گام دوم به دست آوردیم، در تساوی (*) جای گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1 - 3b = 2 - 2b \Rightarrow -1 = b \\ -2a = 2 - 2(-1) = 4 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

بنابراین $[a+b] = [-2-1] = -3$ می‌شود:

گام ۴ طبق مورد (۳) درس‌نامه، در تساوی (*) می‌توانیم به این صورت x را تنها کنیم:

$$x - 1 = \log_2(2k\pi \pm \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \log_2(2k\pi \pm \frac{\pi}{6}) + 1$$

$$= \log_2 2(2k\pi \pm \frac{\pi}{6}) = \log_2(4k\pi \pm \frac{\pi}{3})$$

گام ۵ حالا طبق میل سؤال $x = \log_2(4k\pi \pm \frac{\pi}{3})$ را بین صفر و ۵ قرار می‌دهیم تا به

نامساوی $0 < \log_2(4k\pi \pm \frac{\pi}{3}) < 5$ برسیم. در این نامساوی مبنای لگاریتم عددی بزرگ‌تر

از ۱ است؛ پس طبق مورد (۴) درس‌نامه، بدون تغییر جهت نامساوی می‌توانیم بنویسیم:

$$2^0 < 4k\pi \pm \frac{\pi}{3} < 2^5 \Rightarrow \begin{cases} 1 < 4k\pi + \frac{\pi}{3} < 32 \Rightarrow k = 0, 1, 2 \\ 1 < 4k\pi - \frac{\pi}{3} < 32 \Rightarrow k = 1, 2 \end{cases}$$

گام ۶ پس معادله در مجموع «۳+۲=۵» جواب دارد.

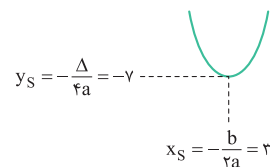
۱۴- گزینه ۲

گام ۱ فرض می‌کنیم $a = g^{-1}(0)$ باشد؛ پس $g(a) = 0$ می‌شود.

گام ۲ به گفته سؤال، معادله $g(f(g(x))) = 0$ فقط یک جواب دارد؛ پس معادله

$f(g(x)) = a$ هم باید یک جواب داشته باشد.

گام ۳ نمودار سهمی f به صورت مقابل است:



گام ۴ همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، وقتی $a > -7$ باشد، خط $y = a$ سهمی f را

در دو نقطه قطع می‌کند، این یعنی معادله $f(g(x)) = a$ دو ریشه دارد؛ یکی وقتی

$g(x) = k_1$ باشد و دیگری وقتی $g(x) = k_2$ باشد (حواسمان هم هست که چون g صعودی

و بردش $\mathbb{R}$ است، هر کدام از معادله‌های $g(x) = k_1$ و $g(x) = k_2$ یک جواب دارند، اما اگر $a = -7$ باشد، خط

$y = a$ و سهمی، فقط یک نقطه مشترک دارند؛ پس

می‌توانیم بگوییم معادله $f(g(x)) = a$ هم یک جواب دارد؛ بنابراین $a = -7$ است.

۱۵- گزینه ۱

شفاف‌سازی $f(f(x)) = x$ ، یعنی f و f^{-1} برابزند.

درس‌نامه ۱ به هر تابع کسری با ضابطه $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به شرطی که $c \neq 0$ و

$ad - bc \neq 0$ باشد، یک تابع هموگرافیک می‌گوییم.

۲ برای پیدا کردن ضابطه وارون توابع هموگرافیکی، اول جای a و d را عوض می‌کنیم؛ بعد

جفتشان را قرینه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

۳ $f(f(x)) = x$ ، یعنی f و f^{-1} برابزند.

۴ در توابع هموگرافیکی هر وقت a و d قرینه همدیگر باشند، f و f^{-1} برابر می‌شوند، این

یعنی وارون تابع هموگرافیکی $y = \frac{ax+b}{cx-a}$ می‌شود خودش.

گام ۱ طبق «شفاف‌سازی» f و f^{-1} برابزند؛ پس طبق مورد (۴) درس‌نامه می‌توانیم

ضابطه تابع هموگرافیکی $f(x)$ را به این صورت بنویسیم:

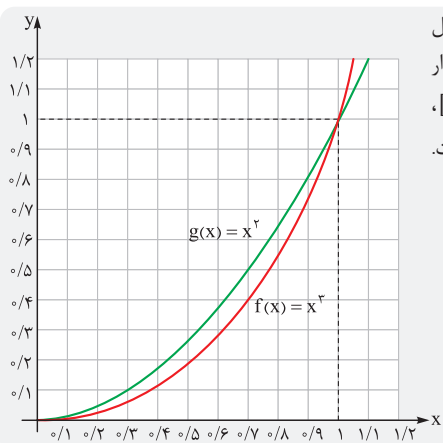
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

گام ۱ باید حواسمان باشد که زیر رادیکال‌ها منفی نشوند. در مرحله اول باید $x - \sqrt{x^2 - x^3} \geq 0$ و در نتیجه $x \geq \sqrt{x^2 - x^3}$ باشد. طبق مورد (۴) درس‌نامه، $\sqrt{x^2 - x^3}$ به خاطر فرجه زوجش، همیشه بزرگ‌تر مساوی صفر است؛ پس x هم باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد:

$$x \geq \sqrt{x^2 - x^3} \Rightarrow x \geq 0 \quad (۱)$$

بزرگ‌تر مساوی صفر

گام ۲ در مرحله دوم، $[x^2 - x^3]$ هم باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد:

$$[x^2 - x^3] \geq 0 \Rightarrow x^2 - x^3 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq x^3 \quad (۲)$$


نکته همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، برای $x \geq 0$ ، نمودار $g(x) = x^2$ فقط در بازه $[0, 1]$ ، بزرگ‌تر مساوی $f(x) = x^3$ است.

طبق نکته بالا، فقط در بازه $[0, 1]$ است که نامساوی‌های (۱) و (۲) برقرار می‌شوند؛ پس $0 \leq x \leq 1$ است. واضح است که در این بازه، $x^2 - x^3 < 1$ و در نتیجه $[x^2 - x^3] = \sqrt{x^2 - x^3}$ می‌شود، بنابراین ضابطه $f(x)$ به این صورت درمی‌آید:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} = \sqrt{x}$$

گام ۳ طبق مورد (۱) درس‌نامه، مختصات هر نقطه دلخواه روی $f(x) = \sqrt{x}$ را می‌توانیم به صورت $A(\alpha, \sqrt{\alpha})$ در نظر بگیریم. فاصله این نقطه از خط $y - x + 1 = 0$ را به کمک مورد (۳) درس‌نامه حساب می‌کنیم:

$$d(\alpha) = \frac{|\sqrt{\alpha} - \alpha + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|\sqrt{\alpha} - \alpha + 1|}{\sqrt{2}}$$

این‌جا باید حواسمان باشد که چون $0 \leq x \leq 1$ است؛ پس $0 \leq \alpha \leq 1$ می‌شود.

نکته وقتی $0 \leq \alpha \leq 1$ باشد، هر چه توان α بیشتر شود، مقدارش کوچک‌تر می‌شود؛ یعنی:

$$1 \geq \dots \geq \sqrt[3]{\alpha} \geq \sqrt{\alpha} \geq \alpha \geq \alpha^2 \geq \alpha^3 \geq \dots \geq 0$$

طبق نکته، چون $0 \leq \alpha \leq 1$ ؛ پس $\sqrt{\alpha} \geq \alpha$ و در نتیجه $\sqrt{\alpha} - \alpha \geq 0$ می‌شود؛ این یعنی داخل قدرمطلق $|\sqrt{\alpha} - \alpha + 1|$ هم مثبت است:

$$d(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha} - \alpha + 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\alpha} - \alpha + 1)$$

گام ۴ حالا باید اکسترمم مطلق $d(\alpha)$ را در بازه $[0, 1]$ به دست بیاوریم. اول $d'(\alpha)$ را پیدا می‌کنیم:

$$d'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} - 1 \right) = \frac{1 - 2\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2}\alpha}$$

حالا ریشه‌های صورت و مخرج $d'(\alpha)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 1 - 2\sqrt{\alpha} = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} \alpha = \frac{1}{4} \\ 2\sqrt{2}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

بنابراین $\{0, \frac{1}{4}, 1\}$ مجموعه نقاط بحرانی تابع $d(\alpha)$ هستند. مقدار $d(\alpha)$ را در این نقاط حساب می‌کنیم:

$$d(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 - 0 + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

$$d(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 1 + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

با توجه به این‌که $\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{5\sqrt{2}}{8} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ پس $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ جواب می‌شود.

درس‌نامه ۱ دوتا از نقاط مشتق‌ناپذیر مهم را در جدول زیر ببینید:

توضیح	در چه تابع‌هایی معمولاً اتفاق می‌افتد؟
نقاط گوشه	(۱) ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق به شرطی که پشت آن، عامل صفرکننده نباشد. (۲) در نقاط مرزی تابع‌های چندضابطه‌ای که تابع در آن پیوسته بوده ولی مشتق چپ و راست دو عدد دیگری ∞ می‌شود.
نقاط دارای مماس قائم	تابع در آن نقطه پیوسته است، ولی مشتق ∞ می‌شود. در ریشه‌های ساده یا مضاعف زیر رادیکال با فرجه ۳

۲ اگر تابع f در همسایگی راست $x = a$ پیوسته باشد، مشتق راستش در $x = a$ به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

هم‌چنین معادله نیم‌مماس راست f در $x = a$ هم به این صورت نوشته می‌شود:

$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

گام ۱ طبق مورد (۱) درس‌نامه، نقطه گوشه تابع، ریشه ساده داخل قدرمطلق است:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

گام ۲ نیم‌خط مماس راست در $x = 2$ را می‌خواهیم؛ پس $x \geq 2$ و در نتیجه $2x - 4 \geq 0$ است؛ بنابراین ضابطه تابع را می‌توانیم بدون قدرمطلق بنویسیم:

$$f(x) = (2x - 4)\sqrt[3]{x + a}$$

گام ۳ $f'_+(2)$ را به کمک مورد (۲) درس‌نامه، به دست می‌آوریم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2(x-2))\sqrt[3]{x+a}}{x-2} = 2\sqrt[3]{2+a}$$

پس معادله نیم‌مماس راست به صورت $y - f(2) = 2\sqrt[3]{2+a}(x - 2)$ می‌شود.

گام ۴ طبق مورد (۱) درس‌نامه، خط مماس قائم، ریشه زیر رادیکال، یعنی $x = -a$ است.

گام ۵ به گفته سؤال، دو خط به‌دست‌آمده در گام‌های (۳) و (۴) یکدیگر را در نقطه‌ای به عرض $y = -2$ قطع می‌کنند؛ پس نقطه $(-a, -2)$ روی نیم‌مماس راست است، یعنی:

$$-2 = 2\sqrt[3]{2+a}(-a-2) \Rightarrow 1 = \sqrt[3]{2+a}(a+2) \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 3} (a+2)^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a+2=1 \Rightarrow a=-1 \\ a+2=-1 \Rightarrow a=-3 \end{cases}$$

به دنبال کم‌ترین مقدار a هستیم، پس $a = -3$ را انتخاب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ اگر نقطه‌ای مثل A روی تابع $y = f(x)$ باشد، می‌توانیم مختصات پارامتری آن را به صورت $A(\alpha, f(\alpha))$ در نظر بگیریم. مثلاً اگر نقطه A روی تابع $y = x^3$ قرار داشته باشد، می‌توانیم بگوییم مختصات پارامتری‌اش به صورت $A(\alpha, \alpha^3)$ است.

۲ برای به دست آوردن اکسترمم مطلق یک تابع مثل $f(x)$ ، در بازه $[a, b]$ ، کارهای زیر را انجام دهیم:

(الف) نقطه‌های بحرانی تابع $f(x)$ را در بازه $[a, b]$ پیدا می‌کنیم. این نقطه‌های بحرانی شامل ریشه‌های مشتق، نقطه‌های مشتق‌ناپذیر و سر و ته بازه $[a, b]$ می‌شود.

(ب) مقدار تابع $f(x)$ را در تمام نقطه‌های (الف) حساب می‌کنیم. کم‌ترینشان، $\min$ مطلق و بیش‌ترینشان، $\max$ مطلق است.

۳ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر می‌شود با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۴ رادیکال با فرجه زوج، در حالت کلی بزرگ‌تر مساوی صفر است؛ این یعنی در حالت کلی می‌توانیم بگوییم $\sqrt[n]{0} \geq 0$ می‌شود.

۱۹- گزینه ۳

شفاف‌سازی

بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک اعداد ستون اول، ستون دوم و ستون سوم به ترتیب ۱، ۲ و ۳ باشد. یعنی:

۳ = «ب.م.م» اعداد ستون سوم، ۲ = «ب.م.م» اعداد ستون دوم، ۱ = «ب.م.م» اعداد ستون اول

گام ۱: برای این که «ب.م.م» اعداد ستون سوم ۳ باشد، سه عدد مضرب ۳ می‌خواهیم. از بین ۱ تا ۹ فقط ۳، ۶ و ۹ این‌جوری هستند؛ پس این سه عدد حتماً باید بروند در ستون سوم، ۳! هم جایگشت دارند. از این‌جا به بعد کلاً شش عدد ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ را داریم.

گام ۲: برای این که «ب.م.م» اعداد ستون دوم ۲ بشود هم ۳ تا عدد زوج می‌خواهیم. از بین ۶ عدد بالا فقط ۲، ۴ و ۸ این‌جوری هستند؛ پس این سه عدد باید بروند در ستون دوم، ۳! هم جایگشت دارند.

گام ۳: الان فقط سه عدد ۵، ۷ و ۸ را داریم که باید بروند در ستون اول، «ب.م.م» شان ۱ است؛ ۳! هم جایگشت دارند.

حالا می‌توانیم بگوییم طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها می‌شود:

$$3! \times 3! \times 3! = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

۲۰- گزینه ۳

شفاف‌سازی

توابع $f(x) = x^2 + mx + n$ و $g(x) = x^2 + nx + m$ ، محور طول‌ها را قطع نمی‌کنند. یعنی معادله‌های $x^2 + mx + n = 0$ و $x^2 + nx + m = 0$ جواب ندارند.

درس‌نامه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرطی جواب ندارد که $\Delta < 0$ باشد.

گام ۱: با توجه به «شفاف‌سازی» و «درس‌نامه» باید دلتای معادله‌های $x^2 + mx + n = 0$ و $x^2 + nx + m = 0$ را کوچک‌تر از صفر بگذاریم:

$$m^2 - 4(n)(n) < 0 \Rightarrow m^2 < 4n \quad (I) \text{ معادله (I)}$$

$$n^2 - 4(m)(m) < 0 \Rightarrow n^2 < 4m \quad (II) \text{ معادله (II)}$$

گام ۲: چون m عدد رو شدهٔ تاس است، $m \geq 0$ و n^2 هم که همیشه مثبت است. بنابراین حق داریم طرفین نابرابری (۱) را به توان ۲ برسانیم. این‌جوری به نابرابری $m^4 < 16n^2$ (۲) می‌رسیم.

طرفین (۲) را هم در ۱۶ ضرب می‌کنیم تا به $16n^2 < 64m$ برسیم. از (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} m^4 < 16n^2 \\ 16n^2 < 64m \end{cases} \Rightarrow m^4 < 16n^2 < 64m \quad (*)$$

گام ۳: حالا می‌توانیم در نامساوی (*) به جای m ، اعداد ۱ تا ۶ را جای‌گذاری کنیم و ببینیم در هر حالت چند مقدار قابل قبول برای m داریم:

۱ مقدار: $m=1 \Rightarrow 1 < 16n^2 < 64 \Rightarrow n=1$

۱ مقدار: $m=2 \Rightarrow 16 < 16n^2 < 128 \xrightarrow{\div 16} 1 < n^2 < 8 \Rightarrow n=2$

۱ مقدار: $m=3 \Rightarrow 81 < 16n^2 < 192 \Rightarrow n=3$

$m=4 \Rightarrow 256 < 16n^2 < 256 \times 4 \xrightarrow{\div 16} 16 < n^2 < 64 \times 4$ ✗

$m=5 \Rightarrow 625 < 16n^2 < 320 \xrightarrow{\div 16} 39 \dots < n^2 < 20$ ✗
عددی داریم که از ۳۹ بزرگ‌تر باشد ولی از ۲۰ کوچک‌تر!

$m=6 \Rightarrow 1296 < 16n^2 < 64 \times 6 \Rightarrow 81 \times 3^4 < 16n^2 < 384 \times 6 \Rightarrow 81 < n^2 < 24$ ✗

پس در «۱+۱+۱=۳» حالت خواستهٔ مسئله برآورده می‌شود.

گام ۴: در پرتاب دو تاس کلاً ۳۶ حالت وجود دارد. همان‌طور که در گام سوم دیدید در ۳ حالت از این ۳۶ حالت، خواستهٔ مسئله برآورده می‌شود. پس احتمال مورد نظر برابر است. $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

۲۱- گزینه ۲

درس‌نامه

تعدادی از قوانین احتمال را ببینید:

۱ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: احتمال رخ دادن A یا B

۲ $P(A') = 1 - P(A)$: احتمال آن که A رخ ندهد.

۳ $P(A' \cap B') = P((A \cup B)')$: احتمال آن که نه A رخ بدهد و نه B. $= 1 - P(A \cup B)$

۴ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$: احتمال رخ دادن A به شرط رخ دادن B

۵ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$: احتمال آن که A رخ بدهد ولی B نه

گام ۱: از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال، داریم:

$$P(A) = P(A - B) \Rightarrow P(A) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

گام ۲: حالا از فرمول احتمال شرطی کمک می‌گیریم: $P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')}$

$$= \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{9}$$

۲۲- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر میانگین دادهٔ $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، در این صورت واریانسشان از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شوند:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ انحراف معیار همان جذر واریانس است: $\text{انحراف معیار} = \sqrt{\text{واریانس}}$

گام ۱: تختهٔ اول را به این صورت در نظر می‌گیریم:

x, y, z

به گفتهٔ سؤال، علی در هر مرحله میانگین دو عدد را با عدد سوم جمع می‌کند و حاصل را روی تختهٔ دوم می‌نویسد؛ پس اعداد تختهٔ دوم برحسب x, y و z به این صورت هستند:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{x+y}{2} + z \\ &\frac{y+z}{2} + x \\ &\frac{z+x}{2} + y \end{aligned} \right.$$

(تختهٔ دوم)

این اعداد باید با ۱۳، ۴۲ و ۳۷ برابر باشند؛ پس می‌نویسیم:

$$\frac{x+y}{2} + z = 13 \quad (1)$$

$$\frac{y+z}{2} + x = 37 \quad (2)$$

$$\frac{z+x}{2} + y = 42 \quad (3)$$

گام ۲: طرفین تساوی‌های بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{(x+y) + (y+z) + (z+x)}{2} + x + y + z = 13 + 37 + 42$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+y+z)}{x} + (x+y+z) = 92 \Rightarrow 2(x+y+z) = 92 \Rightarrow x+y+z = 46$$

حالا سعی می‌کنیم در روابط (۱)، (۲) و (۳)، $x+y+z$ درست کنیم تا به‌جایش ۴۸ بگذاریم:

$$\frac{x+y}{2} + z = 13 \xrightarrow{+2} x+y+z = 26 \Rightarrow \underbrace{(x+y+z)}_{46} + z = 26 \Rightarrow z = -20$$

$$\frac{y+z}{2} + x = 37 \xrightarrow{+2} y+z+x = 74 \Rightarrow \underbrace{(x+y+z)}_{46} + x = 74 \Rightarrow x = 28$$

$$\frac{z+x}{2} + y = 42 \xrightarrow{+2} z+x+y = 84 \Rightarrow \underbrace{(x+y+z)}_{46} + y = 84 \Rightarrow y = 38$$

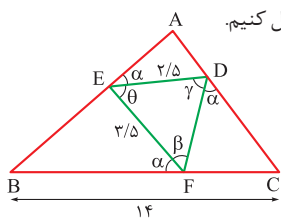
پس اعداد تختهٔ اول -20 ، 28 و 38 هستند.

گام ۳: حالا اعداد تختهٔ اول و دوم را در تختهٔ سوم می‌نویسیم:

$$-20, 28, 38, 37, 13, 42$$

(تختهٔ سوم)

گام ۱ (پیدا کردن مثلث های مشابه):

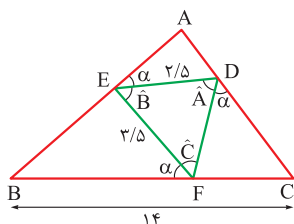


بباید زاویه های داخلی مثلث های ABC و DEF را تحلیل کنیم. همان طور که در شکل مقابل می بینید، زاویه های داخلی مثلث DEF را α, β, γ و در نظر گرفته ایم. خوب به زاویه $\hat{D}FB$ نگاه کنید؛ این زاویه برای مثلث DFC یک زاویه خارجی است؛ پس طبق مورد (۱) درس نامه برابر می شود با جمع زاویه های $\hat{FDC}$ و $\hat{C}$:

$$\hat{D}FB = \hat{FDC} + \hat{C} \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha + \hat{C} \Rightarrow \beta = \hat{C}$$

به همین ترتیب می توانیم بفهمیم که $\hat{B} = \theta$ و $\hat{A} = \gamma$ است؛ پس می توانیم بگوییم مثلث های DEF و ABC با زاویه های برابر متشابه اند.

گام ۲ (محاسبه خواسته سوال):



حالا باید به کمک مورد (۳) درس نامه، نسبت تشابه مثلث های DEF و ABC را بنویسیم. اول زاویه های برابر را مثل شکل مقابل مشخص می کنیم؛ بعد داریم:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{2/5}{AB} = \frac{3/5}{14} \Rightarrow \frac{2}{5} AB = \frac{3}{5} \times 14$$

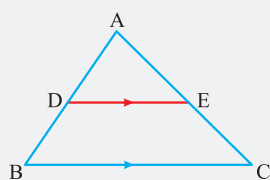
رو به A رو به B رو به C

$$\Rightarrow 7AB = 70 \Rightarrow AB = 10$$

فقط حواستان باشد از نسبت $\frac{DF}{AC}$ نه چیزی را داشتیم و نه چیزی را می خواستیم؛ به همین خاطر کنار گذاشتیمش.

گزینه ۲۵ - ۲۵

درس نامه ۱ در شکل زیر اگر DE موازی با BC باشد، می توانیم تناسب های زیر را بنویسیم:

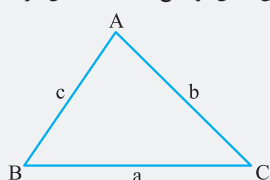


(الف) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

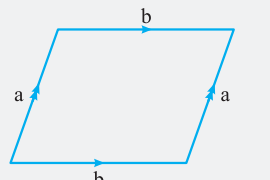
(ب) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

۲ مساحت هر مثلث را می توانیم از رابطه «سینوس زاویه بین همان دو ضلع $\times$ نصف حاصل ضرب دو ضلع $S =$ » به دست بیاوریم. این یعنی برای مساحت مثلث روبه رو می توانیم رابطه های مقابل را بنویسیم:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \text{ یا } \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \text{ یا } \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

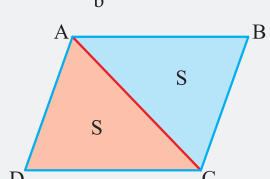


۳ ضلع های مقابل به هم هر متوازی الاضلاع مثل شکل مقابل، هم موازی اند و هم مساوی. برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی هر وقت در یک چهارضلعی، دو ضلع مقابل، هم موازی بودند و هم مساوی، آن چهارضلعی حتماً متوازی الاضلاع است.



۴ قطر هر متوازی الاضلاع آن را مثل شکل مقابل به دو مثلث همنهشت تقسیم می کند؛ به همین خاطر می توانیم بنویسیم:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} \text{ یا } 2S_{ADC}$$



۵ از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می توانیم نتیجه بگیریم که $a = ck$ و $b = dk$ است. مثلاً اگر $a = 3k$ و $b = 5k$ باشد، می توانیم بنویسیم:

انحراف معیار اعداد بالا را می خواهیم؛ پس اول $\bar{x}$ را حساب می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{-20 + 28 + 38 + 37 + 13 + 42}{6} = \frac{138}{6} = 23$$

حالا از فرمول واریانس استفاده می کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(-20-23)^2 + (28-23)^2 + (38-23)^2 + (37-23)^2 + (13-23)^2 + (42-23)^2}{6}$$

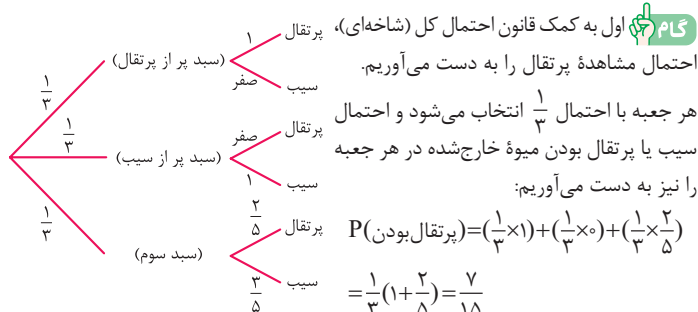
$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{43^2 + 5^2 + 15^2 + 14^2 + 10^2 + 19^2}{6} = \frac{1849 + 25 + 225 + 196 + 100 + 361}{6} = \frac{2756}{6}$$

بنابراین انحراف معیار برابر می شود با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2756}{6}} = \sqrt{\frac{4 \times 689}{6}} = \sqrt{\frac{4}{6}} \times \sqrt{689} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{689}$$

گزینه ۴ - ۲۳

درس نامه قانون بیز: در فرم شرطی احتمال کل، اول احتمال کل را به کمک نمودار درختی حساب کنید، بعد احتمال شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنید.

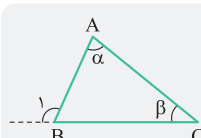


گام ۲ حالا طبق درس نامه، شاخه مطلوب، یعنی شاخه اول را به احتمال کل، تقسیم می کنیم:

$$P(\text{پرتقال} | \text{پرتقال بودن} \wedge \text{سیب پراز پرتقال}) = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۲ - ۲۴

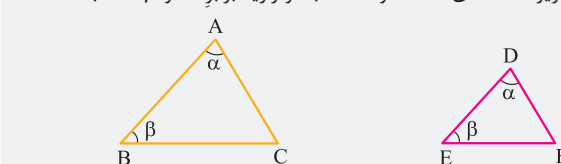
درس نامه ۱ هر زاویه خارجی مثلث، برابر با جمع زاویه های داخلی غیرمجاورش است. مثلاً زاویه خارجی B_1 در شکل مقابل می شود:



$$\hat{B}_1 = \alpha + \beta$$

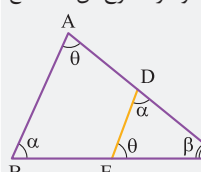
هر وقت دو مثلث، دو زاویه برابر داشته باشند، متشابه اند.

مثلاً در شکل های زیر، مثلث های ABC و DEF با دو زاویه برابر α و β متشابه اند.



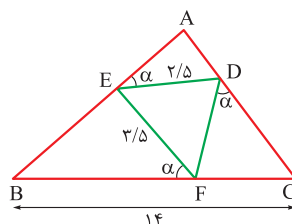
۳ برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع های رو به زاویه های برابر را در یک نسبت زیر هم می نویسیم، به طوری که در صورت نسبت ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث های ABC و DEC در شکل مقابل برابر می شود با:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$



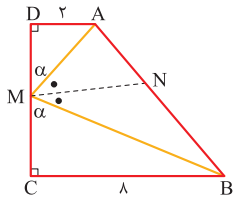
گام ۲ (انتقال اطلاعات مسئله روی شکل):

به گفته سوال، زاویه های $\hat{FDC}$ و $\hat{E}FB$ و $\hat{A}ED$ برابرند، این زاویه ها را با α روی شکل مقابل نشان می دهیم. از تساوی $BC = 4EF = 14$ هم نتیجه می گیریم که:



$$\begin{cases} BC = 14 \\ 4EF = 14 \Rightarrow EF = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3.5 \end{cases}$$

دو مورد بالا را هم روی شکل می نویسیم.



گام ۴ (تحلیل سؤال):

اگر نقطه M روی CD باشد به طوری که $MA + MB$ کمترین مقدار خود را داشته باشد، در این صورت طبق مورد (۱) درس نامه، MA و MB با CD زاویه های برابر می سازند. این زاویه ها را در شکل بالا با α نشان می دهیم.

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال):

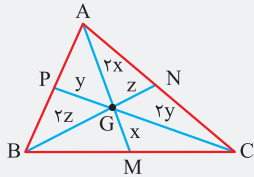
دو مثلث قائم الزاویه MAD و MBC با هم متشابه اند (مورد (۱) درس نامه)؛ پس $\frac{MA}{MB} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. از طرفی در مثلث MAB، MN نیمساز داخلی زاویه M است؛ پس طبق مورد (۲) درس نامه، $\frac{AN}{BN} = \frac{MA}{MB}$ می شود؛ بنابراین:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{AN}{BN+AN} = \frac{1}{4+1} \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{1}{5}$$

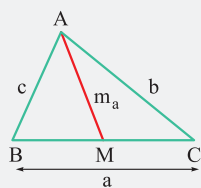
$$\xrightarrow{AB=10} \frac{AN}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow AN=2$$

۲۷- گزینه ۴

استراتژی اول به کمک روابط طولی در دایره و نسبت ۱ به ۲ی که در میانه ها داریم، طول میانه AD را حساب می کنیم؛ بعد به کمک فرمول طول میانه ها، BC را به دست می آوریم.



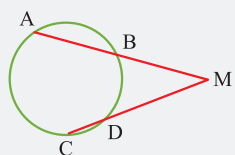
درس نامه ۱ همان طور که در شکل مقابل می بینید؛ میانه های هر مثلث در یک نقطه به اسم مرکز ثقل (نقطه G) هم رس اند. میانه ها همیشه به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می کنند؛ برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:



۲ مثلث ABC با اضلاع a, b, c را به همراه میانه AM، در شکل مقابل ببینید. طول میانه AM را می توانیم به کمک رابطه زیر به دست بیاوریم:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

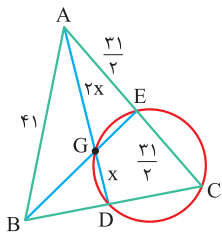
$$\text{یا } AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$



۳ هر وقت امتداد دو وتر، مثل شکل مقابل، بیرون دایره همدیگر را قطع کنند، بین قطعاتی که روی هم می سازند، رابطه زیر برقرار است:

$$MB \times MA = MD \times MC$$

گام ۴ (محاسبه طول میانه AD):



طبق مورد (۱) درس نامه، می دانیم میانه ها به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می کنند؛ پس می توانیم فرض کنیم $AG = 2x$ باشد. از طرفی چون BE میانه است؛ پس $GD = x$ و $AE = EC = \frac{31}{2}$. حالا خوب به وترهای GD و EC در شکل مقابل توجه کنید. همان طور که می بینید امتدادشان در نقطه A همدیگر را قطع می کنند؛ پس طبق مورد (۳) درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$AG \times AD = AE \times AC \xrightarrow{AD=2x+x=3x} (2x)(3x) = \frac{31}{2} \times 31$$

$$\Rightarrow 6x^2 = \frac{31^2}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{31^2}{12} \Rightarrow x = \frac{31}{\sqrt{12}} = \frac{31}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{31\sqrt{3}}{6}$$

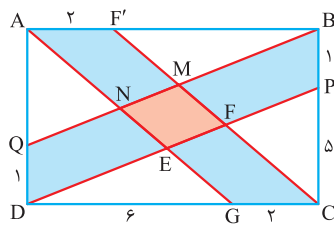
بنابراین طول میانه AD برابر می شود با:

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال):

حالا که طول میانه AD را داریم، می توانیم فرمول میانه را برایش بنویسیم (مورد (۲) درس نامه):

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 41^2 + 31^2 = 2\left(\frac{31\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 41^2 + 31^2 = \frac{31^2 \times 3}{2} + \frac{BC^2}{2}$$



گام ۴ (تشخیص نوع چهارضلعی MNEF):

در مستطیل مقابل، ضلع های مقابل به هم موازی اند؛ پس:

$$\begin{cases} AF' \parallel GC \\ BP \parallel QD \end{cases}$$

حالا خوب به چهارضلعی های BPDQ و AF'CG نگاه کنید. در اولی دو ضلع مقابل به هم موازی و در دومی دو ضلع مقابل به هم موازی و مساوی اند؛ پس طبق مورد (۳) درس نامه این دو چهارضلعی، متوازی الاضلاع اند. بنابراین ضلع های مقابل به هم موازی اند؛ یعنی:

$$\begin{cases} AF'CG : MF \parallel NE \\ BPDQ : MN \parallel EF \end{cases}$$

الان که فهمیدیم ضلع های مقابل به هم موازی اند، طبق مورد (۳) درس نامه، می توانیم بگوییم این چهارضلعی هم متوازی الاضلاع است.

گام ۵ (محاسبه طول پاره خط های مورد نیاز):

در ادامه به مثلث سبز مقابل توجه کنید. در این مثلث EG و FC موازی اند؛ پس طبق مورد (۱) درس نامه، می توانیم بنویسیم:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{DG}{GC} \Rightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$$

از تناسب بالا طبق مورد (۵) درس نامه، نتیجه می گیریم که: $DE = 3x$, $EF = x$. در متوازی الاضلاع MNEF چون ضلع های مقابل به هم مساوی اند، پس $NM = EF = x$. طول و عرض مستطیل به ترتیب « $6+2=8$ » و « $1+5=6$ » هستند؛ پس طول $F'B = AB - AF' = 8 - 2 = 6$ می شود:

$$\frac{BM}{MN} = \frac{BF'}{F'A} \Rightarrow \frac{BM}{x} = \frac{6}{2} \Rightarrow BM = 3x$$

در آخر در مثلث قرمز، تالس جزء به کل می نویسیم تا طول FP را هم بر حسب x به دست بیاوریم:

$$\frac{CP}{CB} = \frac{FP}{MB} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{FP}{3x} \Rightarrow FP = \frac{5}{2}x \text{ یا } \frac{5}{2}x$$

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال):

حالا که طول DE، EF و FP را بر حسب x داریم، می توانیم خواسته سؤال یعنی مقدار $\frac{EF}{DP}$ را حساب کنیم:

$$\frac{EF}{DP} = \frac{x}{3x + x + \frac{5}{2}x} = \frac{x}{\frac{13}{2}x} = \frac{2}{13}$$

۲۶- گزینه ۱

درس نامه ۱ فرض کنید دو نقطه A و B مثل شکل

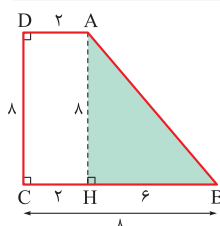
مقابل، در یک طرف خط d واقع اند. اگر نقطه ای واقع بر d باشد به طوری که $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد، آن گاه MA و MB با d زاویه های برابر می سازند؛ بنابراین دو مثلث MAD و MBC متشابه اند.

۲ در شکل روبه رو اگر MN نیمساز داخلی زاویه M باشد، می توانیم نسبت زیر را بنویسیم:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{MA}{MB}$$

گام ۴ (محاسبه طول ساق AB):

اگر در دوزنقه ABCD، ارتفاع AH، مطابق شکل، ارتفاع ABH را رسم کنیم، طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABH، می توانیم بگوییم $AB = 10$ است.



۳۰- گزینه ۲

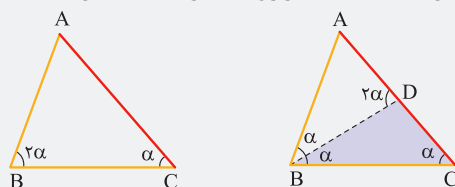
درس‌نامه ۱ در مثلث زیر، نیمساز AD روی ضلع مقابلش، قطعه‌های BD و DC را درست کرده است. طول این قطعات، با اضلاع کناری‌شان متناسب است، یعنی:



طول نیمساز AD را هم می‌توانیم به کمک این رابطه به دست بیاوریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

۲ در بعضی از مسئله‌ها صحبت از مثلی می‌شود که یکی از زاویه‌های داخلی‌اش، دو برابر دیگری است (مثل شکل (۱) که در آن $\hat{B} = 2\hat{C}$ است). در این جور سوالات، اول زاویه‌ها را با α و 2α نمایش بدهید؛ بعد نیمساز زاویه 2α را بکشید (شکل ۲).



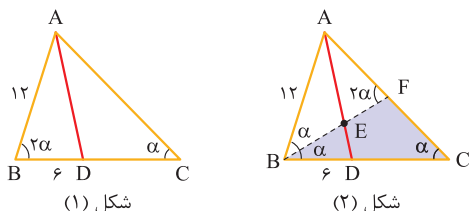
شکل (۱)

شکل (۲)

همان‌طور که در شکل (۲) می‌بینید؛ بعد از کشیدن نیمساز، یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویه خارجی 2α درست می‌شود.

گام ۱ (تحلیل شکل مسئله):

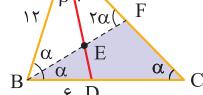
به گفته سؤال $\hat{B} = 2\hat{C}$ است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، اول زاویه‌های B و C را با α و 2α نشان می‌دهیم (شکل ۱)؛ بعد نیمساز زاویه 2α را می‌کشیم (شکل ۲).



شکل (۱)

شکل (۲)

از طرفی سؤال می‌گوید AD هم نیمساز است؛ پس در نهایت شکل مسئله به این صورت درمی‌آید:

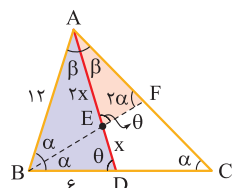


گام ۲ (نوشتن طول قطعات AE و ED برحسب یک پارامتر):

در مثلث ABD، BE نیمساز است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{2x}{x} \Rightarrow AE = 2x, ED = x$$

گام ۳ (محاسبه طول AF و EF):



حالا خوب به مثلث‌های رنگی در شکل مقابل نگاه کنید. در هر دو مثلث 2α و β وجود دارد؛ پس این مثلث‌ها با دو زاویه برابر متشابه‌اند، زاویه سوم برایشان را با θ نشان می‌دهیم. الان نوبت نوشتن نسبت تشابه مثلث‌های رنگی است:

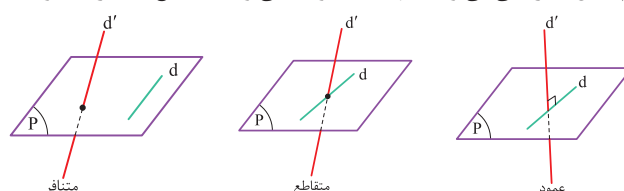
$$\frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BD} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AF}{12} = \frac{EF}{6} = \frac{2x}{3x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AF}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow AF = 8 \\ \frac{EF}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\times 2} 2 \times 41^2 + 2 \times 31^2 = 3 \times 31^2 + BC^2 \\ \Rightarrow BC^2 &= 2 \times 41^2 - 31^2 = 41^2 + \underbrace{(41^2 - 31^2)}_{\text{مزدوج}} = 41^2 + \underbrace{(41-31)}_{10} \underbrace{(41+31)}_{72} \\ \Rightarrow BC^2 &= 1681 + 720 \Rightarrow BC^2 = 2401 = 49^2 \Rightarrow BC = 49 \end{aligned}$$

۲۸- گزینه ۳

درس‌نامه اگر خطی با یکی از خط‌های یک صفحه موازی باشد، با آن صفحه موازی است یا در آن صفحه قرار دارد.

با رسم شکل، به راحتی می‌توانید بفهمید d' و d می‌توانند متقاطع، متناظر یا عمود باشند:



اگر d' با d موازی باشد، در این صورت طبق درس‌نامه، یا d' با صفحه P هم موازی است یا بر صفحه P واقع شده است. در هر دو حالت، فرض متقاطع بودن خط d' و صفحه P نقض می‌شود.

مشاوره در سؤال‌های خط و صفحه در فضا، از رسم شکل غافل نشوید!

۲۹- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر یک چندضلعی، محیطی باشد، یعنی نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن هم‌رساند و در نتیجه دایره‌ای وجود دارد که تمام ضلع‌های چندضلعی بر آن مماس هستند.

مرکز این دایره نقطه هم‌رسانی نیمسازهای داخلی چندضلعی است.

۲ اگر یک چهارضلعی، محیطی باشد، مجموع ضلع‌های مقابل در آن با هم برابرند؛ مثلاً در شکل رسم‌شده داریم:

$$AB + CD = AD + BC$$

گام ۱ (رسم شکل مناسب و محاسبه شعاع دایره محاطی):

زاویه منفرجه دوزنقه متساوی‌الساقین ABCD، 120° است؛ پس زاویه حاده آن 60° است. از طرفی اگر از مرکز دایره محاطی به رأس‌های دوزنقه وصل کنیم، زاویه‌های داخلی نصف می‌شوند (مورد (۱) درس‌نامه).

همان‌طور که می‌بینید، بیشترین فاصله مرکز دایره محاطی از نقاط واقع بر محیط دوزنقه، همان طول پاره خط IC است که بنا به فرض سؤال برابر با ۳ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ICK، داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{IK}{IC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

گام ۲ (محاسبه طول قاعده‌های دوزنقه):

حالا در مثلث قائم‌الزاویه IBH داریم:

$$\tan 60^\circ = \frac{IH}{BH} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\frac{3}{2}}{BH} \Rightarrow BH = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2BH = \sqrt{3}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ICK هم داریم:

$$\cos 30^\circ = \frac{CK}{IC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CK}{3} \Rightarrow CK = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CD = 2CK = 3\sqrt{3}$$

پس طول قاعده کوچک $\sqrt{3}$ و طول قاعده بزرگ $3\sqrt{3}$ است.

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال):

به خاطر محیطی بودن دوزنقه، طبق مورد (۲) درس‌نامه، $AD + BC = AB + CD$ می‌شود؛ پس:

مشاوره دوزنقه محیطی، خیلی مورد علاقه طراحان کنکور سراسری است و در کنکورهای مختلف، بارها از آن سؤال داشته‌ایم.

گام ۱ (محاسبه $|A|$ و خواسته سؤال):

حالا نوبت محاسبه $|A|$ است. طبق مورد (۱) درس‌نامه بهتر است بسط را حول سطر ۱ یا ستون ۱ بنویسیم که صفر بیشتری دارند. ما این‌جا دترمینان را حول سطر ۱ می‌نویسیم:

$$|A| = 0 - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 2 = 6$$

$$\frac{|A|^4}{3^3} = \frac{6^4}{3^3} = \frac{2^4 \times 3^4}{3^3} = 2^4 \times 3 = 48$$

پس خواسته سؤال برابر است با:

۳۶- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ به معادله‌هایی به شکل $ax + by = c$ (a و b اعدادی صحیح‌اند).

معادله سیاله خطی می‌گوییم. برای حل کردن این معادله‌ها کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) طرفین معادله را به پیمانه ضریب کوچک‌تر (یا a یا b) هم‌نشت قرار می‌دهیم تا به یک معادله هم‌نشتی برسیم.

ب) با حل معادله هم‌نشتی، فرم کلی یکی از مجهول‌ها را به دست می‌آوریم.

پ) مجهول به‌دست‌آمده را در معادله سیاله جای‌گذاری می‌کنیم تا مجهول دیگر هم به دست بیاید.

۲) اگر طرفین یک هم‌نشتی به پیمانه m بر عدد صحیحی مثل $a \neq 0$ بخش‌پذیر باشند، می‌توانیم a را از طرفین هم‌نشتی ساده کنیم؛ اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a, m) تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$ax \equiv ay \xrightarrow{(a, m)=d} x \equiv y$$

۳) هر هم‌نشتی مثل $a \equiv b$ را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم، ببینید:

$$a \equiv b \Leftrightarrow a = mk + b$$

گام ۱ ابتدا دو طرف معادله را به پیمانه ضریب کوچک‌تر، یعنی ۱۱ هم‌نشت قرار می‌دهیم:

$$11x + 17y \equiv 1000 \Rightarrow 17y \equiv 1000 \Rightarrow 6y \equiv -1 \Rightarrow 6y \equiv -12$$

$$\xrightarrow{(6, 11)=1} y \equiv -2 \Rightarrow y = 11k - 2$$

گام ۲ با جای‌گذاری y در معادله داریم:

$$11x + 17(11k - 2) = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000 + 34 - 17(11k)}{11} = 94 - 17k$$

گام ۳ سؤال، جواب‌های صحیح و نامنفی معادله را می‌خواهد؛ پس نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow 94 - 17k > 0 \Rightarrow 17k < 94 \Rightarrow k < 5/... \\ y > 0 \Rightarrow 11k - 2 > 0 \Rightarrow 11k > 2 \Rightarrow k > 0/... \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} k = 1, 2, 3, 4, 5$$

بنابراین معادله ۵ جواب صحیح و نامنفی دارد.

۳۷- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ اگر دو عدد به پیمانه m هم‌نشت باشند، به پیمانه مقسوم‌علیه‌های m

هم هم‌نشت هستند. مثلاً اگر $a \equiv b$ ، آن‌گاه $a \equiv b$ ، $a \equiv b$ و $a \equiv b$ هم برقرارند.

۲) اگر دو عدد به پیمانه m و n هم‌نشت باشند، به پیمانه ک.م.م m و n نیز هم‌نشت هستند. مثلاً اگر $a \equiv b$ و $a \equiv b$ ، آن‌گاه $a \equiv b$.

فقط حواسمان باشد، وقتی می‌توانیم چنین کاری را انجام بدهیم که دو طرف هم‌نشتی یکسان باشند.

۳) اگر پیمانه عددی بزرگ و غیروال باشد، می‌توانیم آن را به ضرب دو عدد (که نسبت به هم اول‌اند) بشکنیم. باقی‌مانده را به هر دو عدد به دست آوریم، سمت راست هر دو هم‌نشتی را یکسان کرده و از مورد (۲) استفاده کنیم.

گام ۱ فرض می‌کنیم $A = 15^{48} - 12^{67}$ باشد، در این صورت، طبق مورد (۳) درس‌نامه ۲۸ را به ۷ و ۴ می‌شکنیم؛ پس باقی‌مانده تقسیم A بر ۷ و ۴ را باید جداگانه به دست بیاوریم.

$$12^{67} - 15^{48} \equiv 0 - (-1)^{48} \equiv -1 \equiv 3$$

۳۴- گزینه ۲

گام ۱ (محاسبه درایه‌های A^2): اول A را در خودش ضرب می‌کنیم تا به A^2 برسیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه درایه‌های A^n): حالا ماتریس بالا در تساوی $A^n = 5A^2 - 4I$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به درایه‌های A^n برسیم:

$$A^n = 5 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 10 \\ 15 & 30 & -10 \\ 15 & 10 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 15 & 26 & -10 \\ 15 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

گام ۳ (محاسبه n): حالا توان‌های مختلف A را به دست می‌آوریم تا ببینیم در کدام توان

به درایه‌های ماتریس بالا می‌رسیم.

با A^2 شروع می‌کنیم:

$$A^2 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دیگر محاسبات را ادامه نمی‌دهیم، چون از همین درایه‌های قرمز A^2 و A^n ، معلوم است که این دو ماتریس برابر نیستند؛ پس سراغ A^4 می‌رویم:

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 15 & 26 & -10 \\ 15 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینیم، درایه‌های A^4 و A^n عیناً مثل هم‌اند؛ پس $n = 4$ است.

۳۵- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ در محاسبه دترمینان‌های 3×3 برای صرفه‌جویی در وقت، بهتر است

بسط دترمینان را نسبت به سطر یا ستونی که بیشترین صفر را دارد، انجام دهید.

۲) اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی ثابت باشد، داریم $|kA| = k^n |A|$ ؛ مثلاً اگر

A ماتریسی 2×2 باشد، داریم $|2A| = 2^2 |A|$ ، ولی اگر A ماتریسی 3×3 باشد، داریم $|2A| = 2^3 |A|$.

گام ۱ (تحلیل خواسته سؤال):

$\frac{|A|}{3}$ یک عدد ثابت است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، اگر A ماتریسی 3×3 باشد، داریم:

$$\left| \frac{|A|}{3} A \right| = \left(\frac{|A|}{3} \right)^3 |A| = \frac{|A|^4}{3^3}$$

بنابراین برای محاسبه خواسته سؤال باید مقدار $|A|$ را حساب کنیم.

گام ۲ (تشکیل ماتریس A):

با توجه به رابطه $a_{ij} = \begin{cases} i-j & ; i \neq j \\ i-1 & ; i = j \end{cases}$ ، درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابرند با شماره سطر

آن‌ها منهای یک و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی برابرند با شماره سطر، منهای شماره ستون، پس:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

درس نامه ۱ مجموعه درجات رئوس هر گراف، دو برابر تعداد یال‌ها (q) است؛ یعنی:

$$2q = \text{مجموع درجات رئوس}$$

تعداد رأس‌های فرد هر گراف همیشه عددی زوج است؛ اما تعداد رأس‌های زوج، نگاهش به مرتبه (p) است.

♦ اگر p زوج باشد، تعداد رأس‌های زوج هم عددی زوج است.

♦ اگر p فرد باشد، تعداد رأس‌های زوج هم عددی فرد است.

طبق شفاف‌سازی، با گرافی ۱۳ رأسی طرفیم که در آن $\Delta = 5$ و $\delta = 3$ است. از

$$2q = \text{مجموع درجات رئوس}$$

طرفی طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌دانیم:

پس برای به دست آوردن کم‌ترین اندازه گراف باید کاری کنیم که مجموع درجاتش کم‌ترین شود، بنابراین تا می‌توانیم درجه‌ها را برابر $\delta = 3$ در نظر می‌گیریم. فقط باید حواسمان باشد، چون $\Delta = 5$ است، باید یکی از درجه‌ها را ۵ در نظر بگیریم: $3, 3, 3, \dots, 3, 5$ درجه‌ها

اما طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌دانیم که تعداد فردها نباید عددی فرد باشد (۱۳). از طرفی چون مرتبه فرد است، تعداد رأس‌های زوج هم باید عددی فرد باشد؛ پس یکی از ۳‌ها را به ۴

تبدیل می‌کنیم تا مشکلمان برطرف شود: $3, 3, \dots, 3, 4, 5$ درجه‌ها

حالا به کمک مورد (۱) درس‌نامه، $q_{\min}$ را حساب می‌کنیم:

$$3 + 3 + \dots + 3 + 4 + 5 = 2q_{\min} \Rightarrow 33 + 4 + 5 = 2q_{\min}$$

$$\Rightarrow 2q_{\min} = 42 \Rightarrow q_{\min} = 21$$

فیزیک

گزینه ۳ - ۴۱

استراتژی برای بررسی فرایندهای مربوط به واپاشی، مراحل زیر را به ترتیب طی می‌کنیم:

- فرایند واپاشی را می‌نویسیم. (آله فرایند توی صورت تست داده شده بود، نیازی به این مرحله نداریم.)
- پایستگی عدد جرمی و پایستگی عدد اتمی را برای اجزای دو طرف فرایند می‌نویسیم تا خواسته تست به دست آید.

درس نامه ۱ عدد جرمی: مجموع تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی) و نوترون‌ها (عدد نوترونی)

$$A = Z + N$$

در فرایندهای واپاشی دو اصل زیر برقرار است:

♦ پایستگی عدد جرمی (پایستگی تعداد نوکلئون‌ها): مجموع تعداد نوکلئون‌های دو طرف فرایند، یکسان است.

♦ پایستگی عدد اتمی (پایستگی تعداد پروتون‌ها): مجموع تعداد پروتون‌های دو طرف فرایند، یکسان است.

اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: بار الکتریکی هر جسم، همواره مضرب درستی از بار الکتریکی پایه است.

$$q = \pm ne \quad (n = 1, 2, 3, \dots \text{ بار الکتریکی پایه و } e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$$

گام ۱

نکته ذره α ، هسته اتم هلیوم (${}^4_2\text{He}$) و ذره β^- ، الکترون (${}^0_{-1}\text{e}$) است.

فرایند واپاشی را می‌نویسیم (هسته دختر را با ${}^A_Z\text{Y}$ نشان داده‌ایم):



پایستگی عدد جرمی و پایستگی عدد اتمی را برای اجزای دو طرف فرایند می‌نویسیم:

$$138 + Z = A' + (4) + (0) \Rightarrow A' = Z + 134$$

$$Z = Z' + (2) + (-1) \Rightarrow Z' = Z + 1$$

گام ۲ با توجه به رابطه $Z' = Z + 1$ ، تعداد پروتون‌های هسته جدید، ۲ تا بیشتر از تعداد

پروتون‌های هسته مادر است؛ پس تغییر بار الکتریکی هسته برابر است با:

$$\Delta Q_{\text{هسته}} = (Z' - Z)e = 1 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\xrightarrow{10^{-12} \text{ C} = 1 \text{ pC}} \Delta Q_{\text{هسته}} = 3/2 \times 10^{-7} \text{ pC}$$

$$138 - 154 = (-2) \Rightarrow 138 - 154 = -16 \Rightarrow 138 - 154 = -16$$

۵۷ ارزش برمی‌داریم

تا این‌جا فهمیدیم که: $A \equiv 3, A \equiv 4$

گام ۳ حالا به کمک مورد (۲) درس‌نامه، همنهشتی‌های $A \equiv 3$ و $A \equiv 4$ را به یک همنهشتی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} A \equiv 3 \Rightarrow A \equiv 11 \\ A \equiv 4 \Rightarrow A \equiv 11 \end{cases} \xrightarrow{[4,7]=28} A \equiv 11$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم عدد داده‌شده بر ۲۸ برابر ۱۱ است.

تیزبازی بعد از این‌که فهمیدیم باقی‌مانده A بر ۴ برابر ۳ و باقی‌مانده A بر ۷ برابر ۴ می‌شود، می‌توانستیم بگوییم گزینه‌ای درست است که این دو شرط را داشته باشد. این اتفاق فقط برای عدد ۱۱ در ۱ می‌افتد؛ پس همین گزینه جواب است.

گزینه ۲ - ۳۸

درس نامه ۱ به زیرمجموعه D از رئوس گراف G، مجموعه

احاطه‌گر می‌گوییم؛ هر وقت رأس‌های گراف یا در D باشند یا با حداقل یکی از رئوس D مجاور باشند. مثلاً در گراف مقابل مجموعه‌های زیر همه احاطه‌گرند: $\{a, c\} - \{a, d, b\} - \{e, c\} - \{a, b, c\} - \dots$

۲ به مجموعه احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را داشته باشد، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. مثلاً در گراف بالا $\gamma(G) = 2$ است.

۳ اگر بزرگ‌ترین درجه یک گراف n رأسی، Δ باشد؛ کران پایین $\gamma(G)$ از این نامساوی

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$$

گام ۱ طبق قضیه کران پایین داریم:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{6}{4 + 1} \right\rceil = 2$$

گام ۲ در گراف ۴ - منظم درجه هر رأس ۴ است؛ پس می‌توانیم بگوییم با برداشتن یک رأس، ۵ رأس احاطه می‌شود (یکی خودش، ۴ هم رأس‌هایی که بهش وصل شدن) حالا اگر تنها رأس باقی‌مانده را هم برداریم، گراف قطعاً با دو رأس احاطه می‌شود؛ پس $\gamma(G) = 2$.

گزینه ۲ - ۳۹

شفاف‌سازی منظور از اعداد دورقمی نابیشتر از m، اعداد $\{10, 11, 12, \dots, m\}$ است.

بهترین کار استفاده از گزینه‌ها است، چون بیشترین مقدار m را می‌خواهیم، پس از بزرگ‌ترین گزینه، یعنی $m = 30$ در ۲ شروع می‌کنیم. به ازای $m = 30$ مجموعه داده‌شده به این صورت می‌شود:

نکته در مسائل اصل لانه‌کیوتی با خواسته سؤال تا آخرین نفس لج می‌کنیم تا بدترین حالت ممکن اتفاق بیفتد. یکی بیشتر از بدترین حالت ممکن، می‌شود جواب مسئله. حالا طبق نکته، با خواسته سؤال لج می‌کنیم. برای این کار همه دعووهایی را که مجموع اعضایشان ۴۰ می‌شود و همین‌طور تک‌عضوهایی را که این امکان برایشان وجود ندارد، می‌نویسیم:

$$\{20\} - \{19, 21\} - \{12, 28\} - \{11, 29\} - \{10, 30\}$$

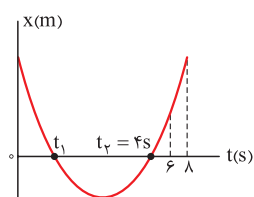
سؤال می‌خواهد مجموع، ۴۰ شود، برای لج‌بازی با این موضوع، از هر کدام از ۱۱ مجموعه بالا یک عضو برمی‌داریم.

این کار نهایت لج‌بازی است. ۱۱ عدد داریم که جمع هیچ دوتایی از آن‌ها ۴۰ نمی‌شود، اما به محض این‌که عدد بعدی (۱۲امی) را برداریم، دو عدد در یک مجموعه قرار می‌گیرند و مجموعشان حتماً ۴۰ می‌شود. بنابراین $m = 30$ شرایط مسئله را برآورده می‌کند و ۲ درست است.

گزینه ۱ - ۴۰

شفاف‌سازی ۱ « $\Delta = \delta + 2 = 5$ »، یعنی بزرگ‌ترین درجه گراف برابر $\Delta = 5$ و کوچک‌ترین درجه‌اش $\delta = 3$ است.

۲ $p(G) = 13$ ، یعنی گراف ۱۳ رأس دارد.



حواستون باشه در شکل روبه‌رو مشخص است که در تمام لحظه‌های بازه زمانی ۶ s تا ۸ s شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان و در نتیجه علامت سرعت، مثبت است.

گام ۳ سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 4s$ و $t' = 7s$ را داریم، کافی است هوشمندانه از رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ استفاده کنیم و در یک مرحله، سرعت متحرک در لحظه $t = 3s$ را حساب کنیم.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{v_2 - v_1}{2 - 0} = \frac{v_3 - v_2}{4 - 2}$$

$$v_2 = 22 \text{ m/s}, v_1 = 7 \text{ m/s} \Rightarrow \frac{22 - 7}{2} = \frac{v_3 - 7}{2} \Rightarrow v_3 = 22 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow 5 = 7 - v_2 \Rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s}$$

گام ۴ در شکل بالا، سرعت متحرک در اولین لحظه‌ای که جهت بردار مکان عوض می‌شود (t_1)، برابر $-7/5 \text{ m/s}$ است؛ پس سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا $t = 3s$ برابر می‌شود با:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{-7/5 + 2/5}{2} = -1/5 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = (-2/5 \text{ m/s}) \hat{i}$$

گزینه ۳ - ۴۵

شفاف‌سازی از این که «در بازه زمانی t_1 تا t_2 دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت کرده‌اند» می‌فهمیم که در این بازه زمانی نمودار سرعت - زمان یکی از متحرک‌ها بالای محور t و نمودار سرعت - زمان متحرک دیگر زیر محور t است. در شکل مقابل نشان داده‌ایم که لحظه‌های t_1 و t_2 را کجا در نظر بگیریم تا در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، نمودار سرعت - زمان متحرک A بالای محور t و نمودار سرعت - زمان متحرک B زیر محور t باشد.

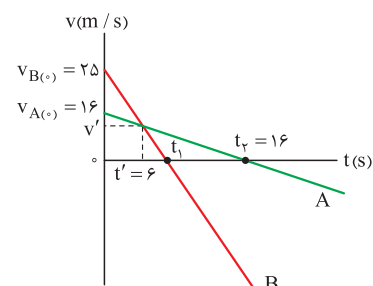
درس‌نامه ۱ در حرکت راست‌خط شتاب ثابت، شتاب حرکت برابر شیب نمودار سرعت - زمان در هر بازه زمانی دلخواه است. مثلاً برای شکل روبه‌رو داریم:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - 0} = \frac{0 - v_0}{t_2 - 0} = \frac{0 - v_1}{t_2 - t_1}$$

۲ در حرکت راست‌خط شتاب ثابت، مکان متحرک در لحظه t از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

در این رابطه x_0 و v_0 به ترتیب مکان و سرعت متحرک در لحظه صفر و a شتاب حرکت است.



گام ۱ نمودار روبه‌رو را ببینید. در لحظه $t' = 6s$ دو نمودار یکدیگر را قطع کرده‌اند.

سرعت دو متحرک در لحظه $t' = 6s$ برابر v' است. ما به کمک شیب نمودار متحرک A می‌توانیم v' را حساب کنیم.

$$a = \frac{v_A(16s) - v_A(0)}{t_2 - 0} = \frac{v' - v_A(0)}{t' - 0}$$

$$\frac{v_A(16s) - v_A(0)}{t_2 - 0} = \frac{v' - v_A(0)}{t' - 0} \Rightarrow \frac{0 - 16}{16 - 0} = \frac{v' - 16}{6 - 0} \Rightarrow v' = 10 \text{ m/s}$$

گام ۲ به کمک دو رابطه‌ای که در گام دوم به دست آوردیم، تعداد نوترون‌های هسته جدید را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A' = Z + 134 \\ Z' = Z + 2 \end{cases} \Rightarrow A' = Z' + 132 \xrightarrow{A' = Z' + N'} N' = 132$$

گزینه ۴ - ۴۲

درس‌نامه کمیت‌های اصلی: در جدول روبه‌رو،

یکای SI	کمیت
متر	طول
کیلوگرم	جرم
ثانیه	زمان
کلوین	دما
مول	مقدار ماده
آمپر	جریان الکتریکی
کندلا (شمع)	شدت روشنایی

۷ کمیت اصلی همراه با یکای آن‌ها در SI را آورده‌ایم:

کمیت‌های فرعی: همه کمیت‌ها به جز ۷ کمیت اصلی

با توجه به درس‌نامه بالا، علت نادرستی بقیه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: ۱) بار الکتریکی کمیت فرعی است. ۲) یکای SI دما، کلوین است. ۳) یکای SI مقدار ماده، مول است.

گزینه ۱ - ۴۳

درس‌نامه کتاب درسی درباره کاربردهای بازتاب امواج به موارد زیر اشاره کرده است:

- میکروفون سهموی: دستگاهی برای ثبت صداهای ضعیف
- لیتوتروپسی: دستگاهی برای شکستن سنگ‌های کلیه، به کمک بازتابنده‌های بیضوی
- برخی جانوران مثل خفاش و دلفین به کمک مکان‌یابی پژواکی، مکان اجسام و به کمک اثر دوپلر، تندی اجسام متحرک اطراف خود را مشخص می‌کنند. این دو جانور از امواج مکانیکی (فراصوت) برای این کار استفاده می‌کنند.
- دستگاه سونار: وسیله‌ای که از طریق مکان‌یابی پژواکی (بازتاب امواج مکانیکی)، مکان اجسام زیر آب را تعیین می‌کند.
- سونوگرافی: در سونوگرافی هم از مکان‌یابی پژواکی (بازتاب امواج مکانیکی) استفاده می‌شود.
- برای تعیین تندی شارش خون از مکان‌یابی پژواکی (بازتاب امواج مکانیکی) به همراه اثر دوپلر استفاده می‌شود.
- آنتن‌های بشقابی: بازتاب و همگرا کردن امواج رادیویی
- اجاق خورشیدی: گرم کردن آب و مواد غذایی از طریق بازتاب امواج فرسرخ
- رادار دوپلری: سامانه‌ای که برای تعیین مکان و تندی خودروها از طریق مکان‌یابی پژواکی (بازتاب امواج الکترومغناطیسی) به همراه اثر دوپلر استفاده می‌شود.
- کارکرد موارد (الف)، (ب) و (ت)، مکان‌یابی پژواکی است (رد ۲ و ۳).

برای اندازه‌گیری تندی شارش خون و در دستگاه سونار از امواج مکانیکی و در رادار دوپلری از امواج الکترومغناطیسی استفاده می‌شود.

گزینه ۲ - ۴۴

شفاف‌سازی ۱ از این که گفته «تندی متحرک در لحظه عبور از مبدأ محور $7/5 \text{ m/s}$ است» با توجه به نمودار می‌فهمیم که سرعت متحرک در بار اول که از مبدأ می‌گذرد، $-7/5 \text{ m/s}$ و بار دوم (یعنی در لحظه $t = 4s$)، $7/5 \text{ m/s}$ است.

۲ «اولین لحظه‌ای که جهت بردار مکان عوض می‌شود» همان لحظه‌ای است که متحرک برای بار اول از مبدأ می‌گذرد.

درس‌نامه در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر

$$\text{سرعت متحرک در لحظه وسط این بازه (یعنی } \frac{t_1 + t_2}{2} \text{)}$$

گام ۱ مسافتی که متحرک در ۲ ثانیه چهارم (از $t_1 = 6s$ تا $t_2 = 8s$) طی می‌کند، برابر 45 m است؛ بنابراین می‌توانیم سرعت متوسط در این بازه زمانی را که برابر سرعت در لحظه

$$\text{وسط آن (} t' = \frac{6+8}{2} = 7s \text{)} \text{ است، حساب کنیم:}$$

$$v_7 = v_{av(6,8)} = \frac{\Delta x(6,8)}{\Delta t} = \frac{45}{2} = 22.5 \text{ m/s}$$

گام ۳ می‌توانیم به کمک شیب نمودار B، لحظه t_1 را هم به دست بیاوریم:

$$B \text{ شیب نمودار} = \frac{v_B(t_1) - v_B(0)}{t_1 - 0} = \frac{v' - v_B(0)}{t' - 0}$$

$$\frac{v_B(t_1) - v_B(0) = 25 \text{ m/s}}{v' = 10 \text{ m/s}, t' = 6 \text{ s}} \rightarrow \frac{0 - 25}{t_1 - 0} = \frac{10 - 25}{6 - 0} \Rightarrow t_1 = \frac{6 \times (-25)}{(-15)} = 10 \text{ s}$$

گام ۴ شتاب هر دو متحرک را که همان شیب نمودارها است، پیدا می‌کنیم:

$$a_A : A \text{ شیب نمودار} = \frac{v_A(16 \text{ s}) - v_A(0)}{t_A - t_0} = \frac{0 - 16}{16 - 0} = -1 \text{ m/s}^2$$

$$a_B : B \text{ شیب نمودار} = \frac{v_B(10 \text{ s}) - v_B(0)}{t_1 - t_0} = \frac{0 - 25}{10 - 0} = -2.5 \text{ m/s}^2$$

گام ۵ می‌خواهیم بدانیم در لحظه‌های t_1 و t_2 فاصله دو متحرک از هم چه قدر بوده است؛ پس مکان هر کدام از متحرک‌ها را در لحظه‌های $t_1 = 10 \text{ s}$ و $t_2 = 16 \text{ s}$ محاسبه می‌کنیم: (هر دو متحرک در مبدأ زمان در مبدأ محور قرار داشته‌اند، یعنی $x_{A,0} = x_{B,0} = 0$).

$$x_{A(10 \text{ s})} = \frac{1}{2} a_A t_1^2 + v_{A(0)} t_1 + x_{A,0} = \frac{1}{2} \times (-1) \times (10)^2 + 16 \times 10 + 0 = 110 \text{ m}$$

$$x_{B(10 \text{ s})} = \frac{1}{2} a_B t_1^2 + v_{B(0)} t_1 + x_{B,0} = \frac{1}{2} \times (-2.5) \times (10)^2 + 25 \times 10 + 0 = 125 \text{ m}$$

$$x_{A(16 \text{ s})} = \frac{1}{2} a_A t_2^2 + v_{A(0)} t_2 + x_{A,0} = \frac{1}{2} \times (-1) \times (16)^2 + 16 \times 16 + 0 = 128 \text{ m}$$

$$x_{B(16 \text{ s})} = \frac{1}{2} a_B t_2^2 + v_{B(0)} t_2 + x_{B,0} = \frac{1}{2} \times (-2.5) \times (16)^2 + 25 \times 16 + 0 = 80 \text{ m}$$

گام ۶ حالا که مکان‌های دو متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 را داریم، می‌توانیم فاصله دو متحرک را در هر یک از این لحظه‌ها پیدا کنیم:

$$d_1 \text{ (فاصله دو متحرک در لحظه } t_1) = |x_{A(10 \text{ s})} - x_{B(10 \text{ s})}| = |110 - 125| = 15 \text{ m}$$

$$d_2 \text{ (فاصله دو متحرک در لحظه } t_2) = |x_{A(16 \text{ s})} - x_{B(16 \text{ s})}| = |128 - 80| = 48 \text{ m}$$

باید ببینیم d_2 چند متر از d_1 بیشتر یا کمتر است: $d_2 - d_1 = 48 - 15 = 33 \text{ m}$ پس فاصله دو متحرک در لحظه t_2 از فاصله آن‌ها در لحظه t_1 بیشتر است.

تله اگر مساحت محصور بین دو نمودار در بازه زمانی t_1 تا t_2 را حساب کنید، به جواب 63 m می‌رسید که یک تله خطرناک است! در واقع مساحت محصور بین دو نمودار در یک بازه معین برابر جابه‌جایی نسبی دو متحرک است و با فاصله دو متحرک از هم تفاوت دارد.

مشاوره عبور کردن از تستی وقت‌گیر یک هنر. آله هنگام آزمون‌داران از این تست گذشتید، اصلاً فودتون رو سرزنش نکنید.

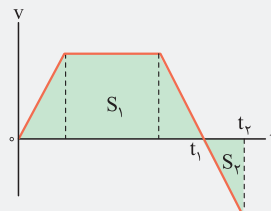
۴۶ - گزینه ۳

استراتژی از روی نمودار شتاب - زمان و با توجه به این که سرعت اولیه متحرک صفر است، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می‌کنیم و سپس موارد (الف) تا (ت) را بررسی می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ در همه انواع حرکت‌ها، شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ محاسبه می‌شود؛ اما در حرکت راست‌خط شتاب ثابت، شتاب لحظه‌ای هم از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

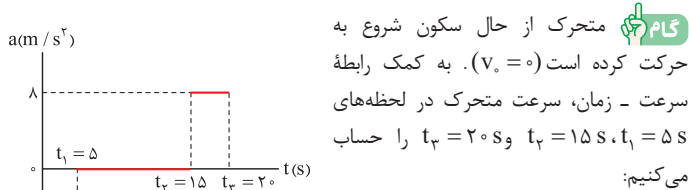
به کمک این رابطه می‌توانیم سرعت متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند را در هر لحظه دلخواه حساب کنیم.



۲ مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان در یک بازه زمانی معین، بیانگر جابه‌جایی متحرک در آن بازه زمانی است. اگر نمودار بالای محور t باشد، جابه‌جایی مثبت و اگر پایین محور t باشد، جابه‌جایی منفی است. مثلاً برای شکل روبه‌رو داریم:

$$\Delta x_{(0, t_2)} = S_1 - S_2$$

۳ در حرکت روی محور x ، در لحظه‌ای که جهت بردار سرعت عوض می‌شود، سرعت متحرک صفر می‌شود. **۴** در حرکت روی محور x ، هرگاه متحرک از مبدأ مکان ($x = 0$) بگذرد، جهت بردار مکان آن عوض می‌شود.



گام ۱ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است ($v_0 = 0$). به کمک رابطه سرعت - زمان، سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 5 \text{ s}$ ، $t_2 = 15 \text{ s}$ و $t_3 = 20 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم:

$$a_1 = \frac{v(\Delta s) - v_0}{t_1 - 0} \quad \text{بازه زمانی صفر تا } 5 \text{ s}$$

$$\frac{a_1 = -4 \text{ m/s}^2}{v_0 = 0} \rightarrow -4 = \frac{v(\Delta s) - 0}{5 - 0} \Rightarrow v(\Delta s) = -20 \text{ m/s}$$

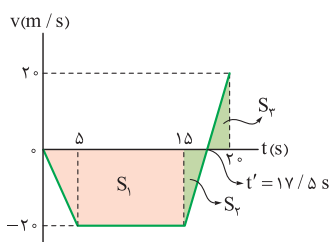
در بازه زمانی $t_1 = 5 \text{ s}$ تا $t_2 = 15 \text{ s}$ شتاب صفر و سرعت ثابت است:

$$t_2 = 15 \text{ s} \text{ تا } t_1 = 5 \text{ s} \text{ بازه زمانی } a_2 = 0 \Rightarrow v(15 \text{ s}) = v(\Delta s) = -20 \text{ m/s}$$

$$t_3 = 20 \text{ s} \text{ تا } t_2 = 15 \text{ s} \text{ بازه زمانی } a_3 = \frac{v(20 \text{ s}) - v(15 \text{ s})}{t_3 - t_2}$$

$$\frac{a_3 = 8 \text{ m/s}^2}{v(15 \text{ s}) = -20 \text{ m/s}} \rightarrow 8 = \frac{v(20 \text{ s}) - (-20)}{20 - 15} \Rightarrow v(20 \text{ s}) = 20 \text{ m/s}$$

گام ۲ حالا با داشتن سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 5 \text{ s}$ ، $t_2 = 15 \text{ s}$ و $t_3 = 20 \text{ s}$ می‌توانیم نمودار سرعت - زمان متحرک را به صورت روبه‌رو رسم کنیم.



از این که ارتفاع مثلث‌های S_2 و S_3 برابر 20 است، می‌فهمیم دو مثلث با هم برابرند و لحظه وسط بازه زمانی 15 s و 20 s است: $t' = \frac{20 + 15}{2} = 17.5 \text{ s}$

گام ۳ بررسی عبارت‌ها: (الف) جابه‌جایی کل متحرک را همان‌طور که در درس‌نامه توضیح دادیم، از طریق سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t حساب می‌کنیم (دقت کنید که S_1 زیر محور t و S_2 و S_3 بالای محور t است):

$$\Delta x_{\text{کل}} = -S_1 - S_2 + S_3 \xrightarrow{S_2=S_3} \Delta x_{\text{کل}} = -S_1 = -\left(\frac{15 + (15 - 5)}{2} \times 20\right) = -250 \text{ m}$$

(ب) سرعت ابتدا و انتهای حرکت را داریم. پس می‌توانیم شتاب متوسط کل را حساب کنیم:

$$a_{av(0, 20 \text{ s})} = \frac{v(20 \text{ s}) - v_0}{t_3 - 0} = \frac{20 - 0}{20} = 1 \text{ m/s}^2$$

(پ) به نمودار سرعت - زمان که در گام دوم رسم کردیم، نگاه کنید. فقط یک بار (در لحظه $t' = 17.5 \text{ s}$) نمودار محور t را قطع کرده و سرعت تغییر جهت داده است. ✓

(ت) متحرک از مبدأ مکان در جهت منفی محور x شروع به حرکت کرده است و در لحظه $t' = 17.5 \text{ s}$ تغییر جهت داده است. جابه‌جایی متحرک در بازه‌های زمانی صفر تا $t' = 17.5 \text{ s}$ و $t' = 17.5 \text{ s}$ تا $t_3 = 20 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم تا مسیر حرکت متحرک را از ابتدا تا انتها تشخیص بدهیم.

$$\Delta x_{(0, 17.5 \text{ s})} = -\left(\frac{S_1 + S_2}{2}\right) = -\left(\frac{17.5 + (15 - 5)}{2} \times 20\right) = -275 \text{ m}$$

دورنقه زیر محور t

$$\Delta x_{(17.5 \text{ s}, 20 \text{ s})} = S_3 = \frac{(20 - 17.5) \times 20}{2} = 25 \text{ m}$$

پس مسیر حرکت متحرک مطابق شکل زیر است و این متحرک در این 20 s هرگز از مبدأ عبور نکرده است و بردار مکانش تغییر جهت نداده است. ✗

۴۷ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ جابه‌جایی متحرکی که با شتاب ثابت a حرکت می‌کند، در بازه زمانی Δt از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 + v_1 \Delta t$$

در رابطه بالا، v_1 سرعت متحرک در ابتدای بازه زمانی Δt است.

۲ در حرکت راست‌خط شتاب ثابت، اگر در بخشی از حرکت زمان نداشته باشیم، می‌توانیم از رابطه مستقل از زمان کمک بگیریم؛ یعنی این رابطه: $v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$

۳ در حرکت راست‌خط شتاب ثابت، شتاب لحظه‌ای از رابطه مقابل محاسبه می‌شود: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

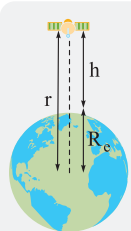
گام ۱ اندازه نیرویی که نردبان و سطح افقی به هم وارد می‌کنند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2}$$

در این رابطه، $F_N = mg$ و ثابت است؛ بنابراین بیشترین مقدار R مربوط به حالتی است که f_s بیشینه باشد (یعنی نردبان در آستانه حرکت قرار گیرد). در نتیجه داریم:

$$R_{\max} = \sqrt{F_N^2 + f_{s,\max}^2} \xrightarrow{f_{s,\max} = F_N \mu_s} R_{\max} = \sqrt{F_N^2 + (F_N \mu_s)^2} \\ = F_N \times \sqrt{1 + \mu_s^2} \xrightarrow{F_N = mg} R_{\max} = mg \times \sqrt{1 + \mu_s^2} \\ \Rightarrow 250 = 20 \times 10 \times \sqrt{1 + \mu_s^2} \Rightarrow \sqrt{1 + \mu_s^2} = \frac{25}{20} \xrightarrow{\text{توان}} 1 + \mu_s^2 = \frac{25}{16} \\ \Rightarrow \mu_s^2 = \frac{9}{16} \xrightarrow{\text{جذر}} \mu_s = \frac{3}{4}$$

۴۹- گزینه ۲



درس‌نامه ۱ شتاب گرانشی در فاصله r از مرکز زمین:

$$g' = \frac{GM_e}{r^2}$$

♦ اگر فاصله تا سطح زمین h و شعاع زمین R_e باشد، داریم:

$$r = R_e + h$$

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{r}{R_e}\right)^2 = \left(\frac{R_e + h}{R_e}\right)^2$$

♦ شکل تناسبی رابطه:

۲ اندازه نیروی وزن (نیروی گرانشی وارد بر) جسم برابر است با:

$$W = mg \rightarrow \text{اندازه شتاب گرانشی در مکان جسم}$$

گام ۱ نسبت شتاب گرانشی در دو حالت را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{r}{R_e}\right)^2 = \left(\frac{R_e + h}{R_e}\right)^2 = \left(\frac{6400 + 800}{6400}\right)^2 = \left(\frac{7200}{6400}\right)^2 \Rightarrow \frac{g'}{g} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}$$

گام ۲ رابطه به دست آمده نشان می‌دهد که شتاب گرانشی از g به $g' = \frac{81}{64}g$ رسیده،

یعنی ۱۹ درصد کاهش یافته است. طبق رابطه $W = mg$ و با توجه به ثابت بودن m ، درصد تغییرات W (نیروی وزن یا همان نیروی گرانشی وارد بر جسم از طرف زمین) مانند درصد تغییرات g است؛ پس W هم ۱۹ درصد کاهش می‌یابد.

۵۰- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ قانون هوک: اگر فنری نسبت به حالت عادی خود، به اندازه x کشیده یا فشرده شود، فنر به جسم متصل به خود نیروی کشسانی وارد می‌کند که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_e = kx$$

ثابت فنر

۲ فنر کشیده، جسم متصل به خود را می‌کشد و فنر فشرده، جسم متصل به خود را هل می‌دهد. شکل‌های روبه‌رو را ببینید:



در این شکل‌ها، F_e نیرویی است که فنر به جسم وارد می‌کند.

$$F_{\text{net}} = ma$$

۳ قانون دوم نیوتون:

گام ۱ در حالت اول، چون تندی آسانسور ثابت است، مطابق شکل (الف)، وزنه در حال تعادل است و در نتیجه نیروی کشسانی وارد بر وزنه برابر وزن وزنه است؛ بنابراین k به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$F_e = W \Rightarrow kx = mg \Rightarrow k \times (25 - 20) = 2 \times 10 \\ \Rightarrow k = \frac{20}{5} = 4 \text{ N/cm}$$

گام ۲ در حالت دوم، نیروهای وارد بر فنر مطابق شکل (ب) است. در این حالت چون F_e بزرگ‌تر از mg است، نیروی خالص و در نتیجه شتاب وزنه به بالا به معنای کندشونده‌بودن حرکت آسانسور است. اندازه این شتاب برابر است با:

$$F_e - W = ma \Rightarrow kx' - mg = ma \Rightarrow 4 \times (26 - 20) - 2 \times 10 = 2a \\ \Rightarrow 24 - 20 = 2a \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}^2$$

نکته حرکت سقوط آزادی که جسم از حال سکون رها می‌شود، یک حرکت راست‌خط با شتاب ثابت $a = -g$ است. از آنجایی که در این حرکت، جهت حرکت در راستای قائم و رو به پایین است، جابه‌جایی و سرعت در تمام لحظه‌ها منفی است.

گام ۱ در مدت $\Delta t = 2 \text{ s}$ گلوله از نقطه B به نقطه C رفته و $m = 60 \text{ g}$ جابه‌جا شده است. پس می‌توانیم رابطه اول درس‌نامه را بنویسیم تا سرعت متحرک در نقطه B معلوم شود:

$$\Delta y_{(BC)} = \frac{1}{2}(-g)(\Delta t)^2 + v_B \Delta t \Rightarrow -60 = \frac{1}{2}(-10)(2)^2 + v_B \times 2 \\ \Rightarrow v_B = -20 \text{ m/s}$$

گام ۲ در شکل روبه‌رو نقطه برخورد گلوله با سطح زمین را D نامیده‌ایم. همین‌طور که در شکل می‌بینید، جابه‌جایی گلوله از نقطه B تا نقطه D برابر 105 m است. به کمک رابطه مستقل از زمان، سرعت برخورد گلوله با سطح زمین را پیدا می‌کنیم:

$$v_D^2 - v_B^2 = 2(-g)\Delta y_{(BD)} \\ \Rightarrow v_D^2 - (-20)^2 = 2(-10) \times (-105) \\ \Rightarrow v_D^2 = 2100 + 400 \Rightarrow v_D = -50 \text{ m/s}$$

(چون جهت حرکت رو به پایین است، علامت سرعت منفی است.)

گام ۳ کافی است رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ را برای ۳ ثانیه آخر بنویسیم تا سرعت متحرک در ۳ ثانیه قبل از برخورد معلوم شود.

$$a = \frac{\Delta v'}{\Delta t'} \xrightarrow{a = -g, \Delta v' = v_D - v'} -g = \frac{v_D - v'}{\Delta t'} \\ \Rightarrow -10 = \frac{-50 - v'}{3} \Rightarrow v' = -20 \text{ m/s} \xrightarrow{\text{تندی را می‌خواهد}} |v'| = 20 \text{ m/s}$$

ابتدا نکته و سپس تیزبازی را بخوانید.

نکته در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه و با شتاب 10 m/s^2 ،

۱ مسافت‌های طی شده در ثانیه‌های متوالی به ترتیب 5 m ، 15 m ، 25 m ، 35 m ، 45 m و ... است. ۲ تندی متحرک در پایان ثانیه‌های متوالی به ترتیب 10 m/s ، 20 m/s ، 30 m/s ، 40 m/s و ... است.

تیزبازی اگر دنباله‌هایی که در نکته بالا گفتیم را با شکل داده‌شده در تست منطبق کنیم، به راحتی به پاسخ تست می‌رسیم. همین‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، گلوله ۳ قبل از برخورد با سطح زمین در نقطه B قرار دارد و گلوله در پایان ثانیه دوم از نقطه B عبور کرده و تندی‌اش در این نقطه 20 m/s است. پس تندی گلوله ۳ قبل از برخورد 20 m/s است.

۴۸- گزینه ۱

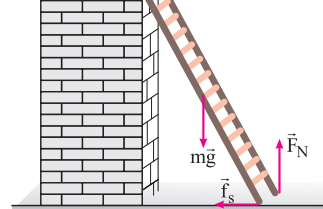
شفاف‌سازی اندازه بیشترین نیرویی که این نردبان می‌تواند به سطح افقی وارد کند، حالتی را بررسی می‌کنیم که نردبان در آستانه حرکت باشد.

درس‌نامه ۱ وقتی جسمی با یک سطح در تماس است، جسم و سطح به هم دو نیرو وارد می‌کنند: نیروی عمودی سطح ($\vec{F}_N$) و نیروی اصطکاک ($\vec{f}$). اگر جسم ساکن باشد، نیروی اصطکاک می‌تواند ایستایی ($\vec{f}_s$) یا ایستایی بیشینه ($\vec{f}_{s,\max}$) باشد. اندازه نیرویی که سطح و جسم به هم وارد می‌کنند، از رابطه مقابل به دست می‌آید:

۲ در حالتی که جسم در آستانه حرکت است، نیروی اصطکاک وارد بر آن ایستایی بیشینه و اندازه آن برابر است با:

$$f_{s,\max} = F_N \mu_s \rightarrow \text{ضریب اصطکاک ایستایی}$$

گام ۱ مطابق شکل مقابل، نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم. به این نردبان ساکن، از طرف سطح افقی، نیروی عمودی سطح ($\vec{F}_N$) و نیروی اصطکاک ایستایی ($\vec{f}_s$) و از طرف دیوار، نیروی عمودی سطح ($\vec{F}_N'$) وارد می‌شود. وزن ($m\vec{g}$) هم که همیشه است. با توجه به تعادل نردبان، در راستای قائم داریم:



۵۳- گزینه ۱

شفاف سازی تندی نوسانگر در نقطه تعادل، بیشینه تندی نوسانگر

درس نامه ۱ بیشینه سرعت (تندی) نوسانگر: $v_{\max} = A\omega \rightarrow$ بسامد زاویه‌ای

$a = -\omega^2 x$ دانه نوسان **۲** رابطه شتاب - مکان در حرکت هماهنگ ساده:

نکته مسافتی که نوسانگر در هر دوره طی می‌کند، ۴ برابر دامنه نوسان است: $\ell = 4A$

به کمک نکته بالا، دامنه نوسان را محاسبه می‌کنیم:

$$\ell = 4A \Rightarrow 20 = 4A \Rightarrow A = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

کام تندی نوسانگر در نقطه تعادل همان تندی بیشینه نوسانگر است؛ بنابراین:

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 0.05 \times \omega \Rightarrow \omega = \frac{10\pi}{2} = 5\pi \text{ rad/s}$$

کام اندازه شتاب نوسانگر در فاصله ۲ cm از نقطه تعادل برابر است با:

$$|a| = \omega^2 x = (5\pi)^2 \times 0.02 = \frac{\pi^2}{2} \text{ m/s}^2$$

۵۴- گزینه ۲

درس نامه ۱ توصیف نوع حرکت

نوسانگر در نوسان کامل:

(۱) و (۳): نوسانگر در حال نزدیک شدن به

مبدأ (مرکز نوسان) ← حرکت تندشونده

(تکانه و انرژی جنبشی در حال افزایش)

(۲) و (۴): نوسانگر در حال دور شدن از مبدأ (مرکز نوسان) ← حرکت کندشونده

(تکانه و انرژی جنبشی در حال کاهش)

۲ در یک موج عرضی، برای تعیین جهت

حرکت هر یک از ذرات محیط در هر لحظه،

از قاعده زیر استفاده می‌کنیم:

با توجه به جهت انتشار، هر ذره (نقطه) قرار

است شبیه ذرات (نقاط) قبل از خود شود.

۳ برای تعیین جهت شتاب هر ذره ۲ راهکار وجود دارد:

الف) طبق رابطه $a = -\omega^2 x$ ، جهت شتاب

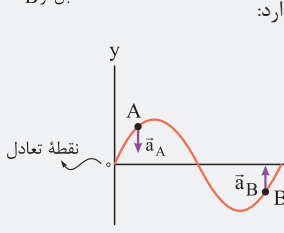
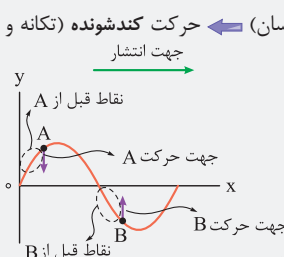
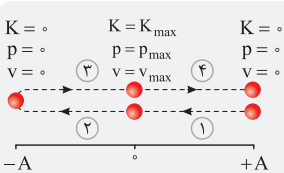
ذره در خلاف جهت بردار مکان ذره است.

ب) جهت شتاب ذره همواره به سمت نقطه

تعادل ذره است.

در شکل روبه‌رو جهت شتاب ذرات A و B

را نشان داده‌ایم:



کام حرکت ذره a تندشونده است، پس ذره a در حال حرکت به طرف نقطه تعادل خود،

یعنی در حال حرکت به طرف پایین است. با نگاهی به شکل موج، می‌توان فهمید که ذره a

می‌خواهد شبیه نقاط سمت راست خود (ناحیه خط چین) شود؛ بنابراین موج از سمت راست

به ذره a می‌رسد، یعنی موج در خلاف جهت محور x در حال انتشار است.

کام با توجه به جهت انتشار موج، جهت حرکت ذره‌های b و c مطابق شکل است.

با توجه به شکل، بردار سرعت ذره b در جهت محور y است (نادرستی ت). واضح است که ذره b

در حال حرکت به سمت نقطه تعادل خود است،

پس تندی و انرژی جنبشی این ذره در حال افزایش

است (درستی ب). همچنین ذره c در حال حرکت

به طرف نقطه بازگشت خود است، در نتیجه تندی

و تکانه این ذره در حال کاهش است (درستی پ).

همین‌جا جواب تست که **۲** است مشخص شده و نیازی به بررسی عبارت (الف) ندارید! ما برای

مکمل‌کاری نادرستی عبارت (الف) رو هم بررسی می‌کنیم.

کام جهت بردار شتاب ذره c را می‌توانید به کمک دو راهکاری که در درس‌نامه گفتیم، تعیین کنید.

روش طبق رابطه $a = -\omega^2 x$ ، بردار شتاب در خلاف جهت بردار مکان است. چون ذره c

بالای نقطه تعادل قرار دارد، بردار مکانش در جهت محور y و در نتیجه بردار شتابش در

خلاف جهت محور y است.

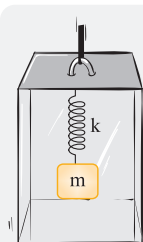
بزرگی شتاب وزنه به صورت زیر هم قابل محاسبه است.

برای فهمیدن تیزبازی، ابتدا نکته زیر را بخوانید:

نکته در شکل روبه‌رو، اگر اختلاف شتاب وزنه در دو حالت Δa

و اختلاف طول فنر در دو حالت Δx باشد، داریم:

$$k\Delta x = m\Delta a$$



تیزبازی با توجه به نکته بالا، اختلاف طول فنر در دو حالت ۱ cm است؛ بنابراین داریم:

$$k\Delta x = m\Delta a \xrightarrow{\Delta a = a_2 - a_1} 4 \times 1 = 2 \times a \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

۵۱- گزینه ۴

درس نامه ۱ برای متحرکی که روی محیط

دایره‌ای به شعاع r، با تندی ثابت v، حرکت دایره‌ای

یکنواخت انجام می‌دهد:

♦ شتاب مرکزگرا:

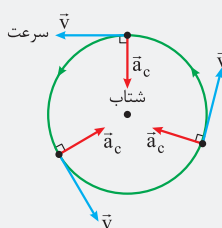
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

♦ دوره تناوب:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

۲ شتاب متوسط:



کام تندی متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow 10 = \frac{v^2}{4} \Rightarrow v = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$$

کام دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 4}{2\sqrt{10}} = \frac{\pi \times \sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \pi \text{ s}$$

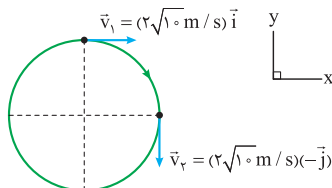
کام ۱ ثانیه برابر با $\frac{T}{4}$ است؛ بنابراین

مطابق شکل مقابل، متحرک در مدت ۱ ثانیه،

$\frac{1}{4}$ محیط دایره را می‌پیماید. ابتدا بردار

شتاب متوسط در این مدت و سپس اندازه

این بردار را محاسبه می‌کنیم:



$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{-2\sqrt{10}\vec{j} - 2\sqrt{10}\vec{i}}{1} = -2\sqrt{10}\vec{j} - 2\sqrt{10}\vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}_{av}| = \sqrt{(-2\sqrt{10})^2 + (-2\sqrt{10})^2} = \sqrt{2 \times 4 \times 10} = 4\sqrt{5} \text{ m/s}^2$$

۵۲- گزینه ۳

درس نامه ۱ تکانه:

جرم جسم

↑

سرعت جسم $\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow$

بسامد زاویه‌ای

↑

$v_{\max} = A\omega = A(2\pi f)$

بسامد نوسان

↑

طول پاره‌خط نوسان

↑

$A = \frac{\text{طول پاره‌خط نوسان}}{2}$

۳ رابطه بین دامنه نوسان (A) و طول پاره‌خط نوسان:

$$A = \frac{\text{طول پاره‌خط نوسان}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$$

کام دامنه نوسان برابر است با:

کام به کمک رابطه تکانه، بیشینه سرعت نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$p_{\max} = mv_{\max} \Rightarrow 2 \times 10^{-2} \pi = 0.1 \times v_{\max} \Rightarrow v_{\max} = 2 \times 10^{-2} \pi \text{ m/s}$$

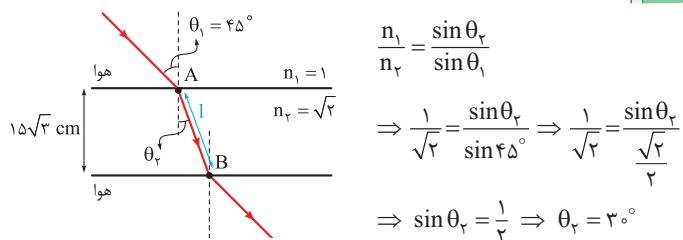
کام بسامد نوسانگر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{\max} = A\omega = A \times 2\pi f \Rightarrow 2 \times 10^{-2} \pi = (2 \times 10^{-2}) \times 2\pi f \Rightarrow f = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ Hz}$$

تله برابر در نظر گرفتن طول پاره‌خط نوسان و دامنه، یکی از اشتباهات رایج بین

دانش‌آموزان است. **۴** به همین دلیل در گزینه‌ها قرار داده شده است.

گام ۳ حالا در شکل زیر θ_p را به دست می‌آوریم و سپس به کمک آن l را حساب می‌کنیم:



بنابراین l برابر است با:

$$\cos \theta_p = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{2} \times 10^{-2}}{l}$$

$$\Rightarrow l = \frac{15\sqrt{2} \times 10^{-2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3 \times 10^{-1} \text{ m}$$

گام ۴ حالا با به دست آوردن زمان، کار را تمام می‌کنیم:

$$\Delta t = \frac{l}{v_r} = \frac{3 \times 10^{-1}}{\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 10^8} = \sqrt{2} \times 10^{-9} \text{ s} \xrightarrow{10^{-9} \text{ s} = 1 \text{ ns}} \Delta t = \sqrt{2} \text{ ns}$$

گزینه ۱ - ۵۸

درس‌نامه ۱ رابطه بین طول موج و بسامد فوتون:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \text{ تندی نور در خلأ})$$

۲ معادله ریدبرگ: طول موج خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad (R \approx 1.097 \times 10^7 \text{ (nm)}^{-1} \text{ ثابت ریدبرگ و } n > n')$$

شماره رشته

در این رابطه طول موج (λ) برحسب نانومتر است.

شماره و نام رشته‌ها به صورت جدول زیر است:

شماره رشته (n')	۱	۲	۳	۴	۵
نام رشته	لیمان	بالمر	پاشن	براکت	پفوند

گام ۱

نکته در اتم هیدروژن، شماره خط طیفی در رشته n' از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n - n' = \text{شماره خط طیفی در رشته } n'$$

براساس نکته بالا، دومین و سومین خط طیف اتم هیدروژن در رشته n' ، به ترتیب مربوط به گذار از ترازهای $n' + 2$ و $n' + 3$ است؛ زیرا:

$$2 = n - n' \Rightarrow n = n' + 2 \quad (\text{دومین خط طیفی})$$

$$3 = n - n' \Rightarrow n = n' + 3 \quad (\text{سومین خط طیفی})$$

ابتدا به کمک معادله ریدبرگ به سراغ طول موج مربوط به این دو گذار می‌رویم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{دومین خط: } \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} \right) \\ \text{سومین خط: } \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+3)^2} \right) \end{cases}$$

حالا طرفین دو عبارت بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{(n'+2)^2} - \frac{1}{(n'+3)^2} \right)$$

گام ۲ صحبت از اختلاف بسامد دو خط است. پس به کمک رابطه $\lambda = \frac{c}{f}$ داریم:

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} \quad \begin{cases} \text{دومین خط: } f_2 = \frac{c}{\lambda_2} \\ \text{سومین خط: } f_3 = \frac{c}{\lambda_3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} f_3 - f_2 = \frac{c}{\lambda_3} - \frac{c}{\lambda_2} = c \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

روش بردار شتاب ذره به سمت نقطه تعادل ذره است. چون نقطه تعادل ذره C پایین آن قرار دارد، بردار شتاب ذره C هم به طرف پایین است.

گزینه ۴ - ۵۵

برحسب دسیل (dB)

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \text{ شدت صوت مرجع})$$

معمولاً برای حل تست‌های این موضوع، دانستن روابط لگاریتمی زیر ضروری است:

$$\log(10^n) = n \log(10), \quad \log(AB) = \log A + \log B$$

$$\log \left(\frac{A}{B} \right) = \log A - \log B$$

اطلاعات تست را در رابطه تراز شدت صوت جای گذاری می‌کنیم:

$$I_0 = 10^{-6} \text{ W/m}^2 \xrightarrow{1 \text{ W} = 10^6 \text{ W}} I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \frac{4\sqrt{2} \times 10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 4\sqrt{2} \times 10^5$$

$$= 10 \times (\log 4 + \log \sqrt{2} + \log 10^5) = 10 \times (2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 + 5 \log 10)$$

$$= 10 \times \left[(2 \times 0.3) + \left(\frac{1}{2} \times 0.3 \right) + (5 \times 1) \right] \Rightarrow \beta = 57.5 \text{ dB}$$

مشاوره

در حل تست‌های مبحث تراز شدت صوت، مهم‌ترین مهارت، حل رابطه لگاریتمی است. در این تست‌ها اغلب $\log 2 = 0.3$ را می‌دهند و شما باید یاد بگیرید که چگونه عددی که با آن سروکار دارید را به صورت مجموع یک عدد صحیح و یک عدد برحسب 0.3 بنویسید. چند نمونه ببینید:

$$\begin{aligned} \diamond 5/1 &= 6 - (3 \times 0.3) & \diamond 5/4 &= 6 - (2 \times 0.3) \\ \diamond 5/2 &= 4 + (4 \times 0.3) & \diamond 5/5 &= 4 + (5 \times 0.3) \\ \diamond 5/3 &= 5 + 0.3 \end{aligned}$$

گزینه ۳ - ۵۶

درس‌نامه ۱ بسامد هماهنگ n ام موج ایستاده تشکیل شده در یک تار دو انتها

بسته، به طول L ، از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \rightarrow \text{تندی انتشار موج}$$

۲ تندی انتشار امواج عرضی در یک تار (طناب) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}} \rightarrow \text{نیروی کشش تار}$$

چگالی تار

قطر مقطع تار

گام ۱ به کمک رابطه بسامد هماهنگ n ام، تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow{f_2=200 \text{ Hz}, L=50 \text{ cm}, n=4} 200 = \frac{4 \times v}{2 \times 0.5} \Rightarrow 200 = 4v \Rightarrow v = 50 \text{ m/s}$$

گام ۲ به کمک رابطه تندی انتشار موج عرضی در تار تحت کشش، قطر مقطع تار را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}} \xrightarrow{v=50 \text{ m/s}, F=60 \text{ N}, \rho=8 \text{ g/cm}^3=8000 \text{ kg/m}^3} 50 = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{60}{8000 \times \pi}} \Rightarrow 50 = \frac{2}{d} \Rightarrow d = 2 \times 10^{-3} \text{ m} \xrightarrow{10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}} d = 2 \text{ mm}$$

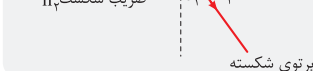
گزینه ۳ - ۵۷

درس‌نامه مطابق شکل روبه‌رو، پرتوی

موجی از محیط (۱) وارد محیط (۲) می‌شود:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{قانون شکست عمومی؛}$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{قانون شکست اسنل؛}$$



گام ۱ به کمک رابطه $\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}$ تندی نور را در محیط n_2 به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{v_2}{3 \times 10^8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_2 = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 10^8 \text{ m/s}$$

گزینه ۲ - ۶۰

درس نامه ۱ اندازه میدان الکتریکی در فاصله r از بار نقطه‌ای q از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}) \quad \text{ثابت کولن}$$


۲ مطابق شکل‌های روبه‌رو، خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج و به بار منفی داخل می‌شوند.

گام ۱ مطابق شکل روبه‌رو، میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_3 را در نقطه A رسم کرده و ابتدا اندازه هر کدام و سپس برابری آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$E_1 = E_3 = \frac{k|q|}{a^2}$$

$$= \frac{9 \times 10^9 \times 2\sqrt{2} \times 10^{-9}}{(0.3)^2} = 200\sqrt{2} \text{ N/C}$$

$$E_{1,3} = E_1 \sqrt{2} = 200\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 400 \text{ N/C}$$

گام ۲ اندازه میدان الکتریکی ناشی از بار $q_2 = q'$ را در نقطه A به دست می‌آوریم:

$$E_2 = \frac{k|q'|}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{9 \times 10^9 \times |q'| \times 10^{-9}}{(0.3\sqrt{2})^2} = 50|q'| \text{ N/C}$$

توجه کنید که بار q' را برحسب نانوکولن در رابطه قرار دادیم.

گام ۳ قبل از حذف بار q' ، میدان الکتریکی خالص حاصل از سه بار در نقطه A ، برابر با $\vec{E}$ و پس از حذف بار q' ، میدان الکتریکی خالص حاصل از بارهای q_1 و q_3 در نقطه A برابر با $\vec{E}_{1,3}$ است. چون جهت $\vec{E}$ را نمی‌دانیم، با دو حالت سروکار داریم:

حالت اول: $\vec{E}$ هم‌جهت با $\vec{E}_{1,3}$ باشد، در این صورت:

$$\vec{E}_{1,3} = 2\vec{E} \Rightarrow \vec{E}_{1,3} = 2(\vec{E}_{1,3} + \vec{E}_2) \Rightarrow 2\vec{E}_2 = -\vec{E}_{1,3} \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{\vec{E}_{1,3}}{2}$$

علامت منفی بیانگر آن است که $\vec{E}_2$ در خلاف جهت $\vec{E}_{1,3}$ است؛ بنابراین $q' < 0$ است. داریم:

$$E_2 = \frac{E_{1,3}}{2} \Rightarrow 50|q'| = \frac{400}{2} \Rightarrow |q'| = 4 \text{ nC} \xrightarrow{q' < 0} q' = -4 \text{ nC}$$

حالت دوم: $\vec{E}$ در خلاف جهت $\vec{E}_{1,3}$ باشد، در این صورت:

$$\vec{E}_{1,3} = -2\vec{E} \Rightarrow \vec{E}_{1,3} = -2(\vec{E}_{1,3} + \vec{E}_2) \Rightarrow 2\vec{E}_2 = -3\vec{E}_{1,3} \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{3}{2}\vec{E}_{1,3}$$

در این حالت هم، علامت منفی بیانگر آن است که $\vec{E}_2$ در خلاف جهت $\vec{E}_{1,3}$ و در نتیجه $q' < 0$ است. داریم:

$$E_2 = \frac{3}{2}E_{1,3} \Rightarrow 50|q'| = \frac{3}{2} \times 400 \Rightarrow |q'| = 12 \text{ nC} \xrightarrow{q' < 0} q' = -12 \text{ nC}$$

بنابراین بار q' می‌تواند -4 nC یا -12 nC باشد.

گزینه ۲ - ۶۱

درس نامه ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار دارد:

اندازه نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:

جهت نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:

علامت بار ذره	جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره
مثبت	هم‌جهت با میدان الکتریکی
منفی	در خلاف جهت میدان الکتریکی

گام ۱ به ذره، دو نیروی وزن و الکتریکی وارد می‌شود. وزن که رو به پایین است؛ بنابراین برای معلق ماندن ذره، نیروی الکتریکی وارد بر آن باید مطابق شکل صفحه بعد رو به بالا و هم‌اندازه با وزن باشد. داریم:

$$F_E = W \Rightarrow E|q| = mg \Rightarrow E \times (250 \times 10^{-9}) = (0.1 \times 10^{-3}) \times 10$$

$$\Rightarrow E = \frac{10^{-3}}{250 \times 10^{-9}} = \frac{10^6}{250} = 4 \times 10^3 \text{ N/C}$$

گام ۲ $f_3 - f_2$ برابر $67.5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ است. $\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2}$ را هم در گام اول به دست آوردیم و با جای‌گذاری این دو، در عبارت قبل داریم:

$$f_3 - f_2 = c \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

تبدیل $(nm)^{-1}$ به m^{-1}

$$\Rightarrow 67.5 \times 10^{12} = 3 \times 10^8 \times \left(\frac{1}{100 \times (n'+2)^2} - \frac{1}{(n'+3)^2} \right) \times 10^9$$

$$\Rightarrow \frac{67.5}{3} \times 10^{-3} = \frac{1}{(n'+2)^2} - \frac{1}{(n'+3)^2} \Rightarrow \frac{9}{400} = \frac{1}{(n'+2)^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}$$

با توجه به ظاهر زمخت معادله، بهتر است گزینه‌ها را یکی یکی امتحان کنید. اگر این کار را انجام دهید، می‌بینید که $n' = 2$ و رشته مورد نظر **بالمر** است.

$$\frac{1}{(2+2)^2} - \frac{1}{(2+3)^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{25} = \frac{25-16}{16 \times 25} = \frac{9}{400} \quad \checkmark$$

گزینه ۴ - ۵۹

درس نامه ۱ در اتم هیدروژن، وقتی که الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کمتر (E_L) می‌رود، یک فوتون گسیل می‌شود. انرژی این فوتون برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است.

$$E = E_U - E_L$$

الکترون ولت (eV) یکای متداول انرژی در فیزیک اتمی و هسته‌ای است. تبدیل eV به J و برعکس به صورت مقابل انجام می‌شود:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

شماره مدار n

انرژی فوتون فرودی $E_n = \frac{-E_R}{n^2}$ (یک ریذبرگ) $E_R = 13.6 \text{ eV}$

۲ معادله فوتوالکتریک:

$$K_{\max} = E - W_0 \rightarrow \text{تابع کار فلز}$$

بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکتریک‌های گسیلی

۳ انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v ، از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

گام ۱

نکته در اتم هیدروژن، $n=1$ حالت پایه، $n=2$ اولین حالت برانگیخته، $n=3$ دومین حالت برانگیخته و ... نامیده می‌شود؛ بنابراین k آمین حالت برانگیخته مربوط به مدار $n = k+1$ است.

دومین حالت برانگیخته مربوط به مدار $n_U = 3$ و حالت پایه مربوط به مدار $n_L = 1$ است؛ بنابراین انرژی فوتون گسیلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E = E_U - E_L = -\frac{E_R}{n_U^2} - \left(-\frac{E_R}{n_L^2} \right) = \frac{-13.6}{3^2} + \frac{13.6}{1^2}$$

$$= \frac{1}{9} \times 13.6 \text{ eV} = 12.1 \text{ eV}$$

گام ۲ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکتریک‌های گسیل‌شده را به دست می‌آوریم:

$$K_{\max} = E - W_0 = 12.1 - 5.7 = 6.4 \text{ eV}$$

$K_{\max}$ برحسب ژول برابر است با:

$$K_{\max} = K_{\max}(\text{eV}) \times 1.6 \times 10^{-19}$$

$$= 6.4 \times 1.6 \times 10^{-19} = 10.24 \times 10^{-19} \text{ J}$$

گام ۳ بیشینه تندی فوتوالکتریک‌ها هم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow 4 \times (1.6 \times 10^{-19}) = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times v_{\max}^2$$

$$\Rightarrow v_{\max}^2 = \frac{2 \times 4 \times (1.6 \times 10^{-19})}{9 \times 10^{-31}} \xrightarrow{\text{جذر}} v_{\max} = \frac{\sqrt{2} \times 2 \times 1.6}{3} \times 10^6$$

$$= \frac{3.2}{3} \sqrt{2} \times 10^6 = \frac{16\sqrt{2}}{15} \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\xrightarrow{10^6 \text{ m/s} = 1 \text{ Mm/s}} v_{\max} = \frac{16\sqrt{2}}{15} \text{ Mm/s}$$

۳ بررسی تغییرات کیفی جریان یا ولتاژ اجزای مدار، در این مرحله به کمک تغییرات I، می‌توانیم تغییرات ولتاژ یا جریان عبوری از اجزای قرار گرفته در مدار را بررسی کنیم.

درس‌نامه در مدار شکل روبه‌رو:

جریان عبوری از باتری: $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$

اختلاف پتانسیل دو سر باتری: $V_{باتری} = \varepsilon - rI$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های R_1 و R_2 : $V_1 = R_1 I_1 = V_{باتری}$ و $V_2 = R_2 I_2 = V_{باتری}$

گام ۱ همه لامپ‌ها مشابه‌اند؛ بنابراین مقاومت هر یک را برابر R در نظر می‌گیریم. با بستن کلید، یک مقاومت به مدار اضافه می‌شود. چون مقاومت‌ها به صورت موازی بسته شده‌اند، با اضافه شدن یک مقاومت، R_{eq} کاهش می‌یابد.

گام ۲ با کاهش مقاومت معادل، جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) افزایش می‌یابد:

کاهش: $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \rightarrow I$ (نادرستی پ) افزایش: I

گام ۳ با افزایش I ، اختلاف پتانسیل دو سر باتری طبق رابطه $V_{باتری} = \varepsilon - rI$ ، کاهش می‌یابد. (نادرستی الف)

همین‌جا می‌تونیم بگیم که عبارت‌های (ب) و (ت) درسته و پاسخ تست ۴ می‌شه. از اون‌جایی که پاسخ‌های ماکم و کسری نداره، درستی این دو عبارت رو هم بررسی می‌کنیم.

اختلاف پتانسیل دو سر لامپ‌های (۱) و (۳) برابر با اختلاف پتانسیل دو سر باتری است. پس با کاهش باتری V ، اختلاف پتانسیل دو سر لامپ‌های (۱) و (۳) نیز کاهش می‌یابد (درستی ب). کاهش: V_1 و V_2 و کاهش: V_3

هم‌چنین با توجه به ثابت بودن مقاومت‌های (۱) و (۳) (به دلیل ثابت بودن دمای لامپ‌ها)، با کاهش V_1 و V_2 ، جریان عبوری از این دو لامپ طبق روابط $V_1 = R I_1$ و $V_2 = R I_2$ نیز کاهش می‌یابد. (درستی ت)

گزینه ۲

شفاف‌سازی ولت‌سنج آرمانی، جریانی از ولت‌سنج عبور نمی‌کند.

درس‌نامه در مدار شکل روبه‌رو:

جریان کل مدار (جریان عبوری از باتری): $I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3 + r}$

اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌ها، $V_1 = R_1 I$ ، $V_2 = R_2 I$ ، $V_3 = R_3 I$

گام ۱ ولت‌سنج آرمانی است؛ بنابراین جریانی از خود عبور نمی‌دهد و در نتیجه در حالت اول مقاومت $R_3 = 12 \Omega$ نقشی در مدار ندارد. با توجه به شکل (الف)، جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) در حالت اول، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + r} = \frac{63}{3 + 6 + 0} = 7 \text{ A}$$

جریان عبوری از آمپرسنج هم برابر $I = 7 \text{ A}$ است.

گام ۲ در این حالت ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_2 = 6 \Omega$ را نشان می‌دهد:

$V = R_2 I = 6 \times 7 = 42 \text{ V}$

(الف)

گام ۳ در حالت دوم، مدار مطابق شکل (ب) درمی‌آید. در این حالت ولت‌سنج آرمانی باعث می‌شود که مقاومت $R_1 = 3 \Omega$ نقشی در مدار نداشته باشد و جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I' = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_3 + r} = \frac{63}{6 + 12 + 0} = 3/5 \text{ A}$$

در این حالت جریان عبوری از آمپرسنج $I' = 3/5 \text{ A}$ است.

گام ۱ چون بار ذره منفی است، نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی در خلاف جهت یکدیگرند؛ بنابراین جهت میدان الکتریکی باید رو به پایین باشد.

تله بی‌توجهی به بار منفی ذره، باعث می‌شود جهت $\vec{E}$ به سمت بالا به دست آید و زدن گزینه نادرست ۱، تاوان همین بی‌توجهی است.

گزینه ۲

درس‌نامه قانون کولن: دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ ثابت کولن})$$

گام ۱ مطابق شکل زیر، بار q_2 به بار q_4 نیروی جاذبه وارد می‌کند. اندازه این نیرو را محاسبه می‌کنیم:

$$F_{24} = k \frac{|q_2| |q_4|}{r_{24}^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-9} \times 3 \times 10^{-9}}{(0.1)^2} = 81 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$10^{-6} \text{ N} = 1 \mu\text{N} \rightarrow F_{24} = 81/10 \mu\text{N}$$

$$\vec{F}_{24} \text{ در خلاف جهت محور } y \rightarrow \vec{F}_{24} = (-81/10 \mu\text{N}) \hat{j}$$

گام ۲ بردار نیروهایی که بارهای q_1 و q_3 به بار q_4 وارد می‌کنند ($\vec{F}'$) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{24} + \vec{F}' \Rightarrow (-2/7 \mu\text{N}) \hat{j} = (-81/10 \mu\text{N}) \hat{j} + \vec{F}' \Rightarrow \vec{F}' = (5/4 \mu\text{N}) \hat{j}$$

از این‌که $\vec{F}'$ در جهت محور y است، می‌توان نتیجه گرفت که بارهای q_1 و q_3 مطابق شکل زیر بار q_4 را دفع می‌کنند و بنابراین این بارها با q_4 هم‌نام‌اند، یعنی هر دو منفی هستند:

گام ۳ حالا F_{14} و F_{34} و برآیند آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} r_1 &= r_3 = 10\sqrt{2} \text{ cm} = 0.1\sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow F_{14} = F_{34} = k \frac{|q_1| |q_4|}{r_1^2} \\ |q_1| &= |q_3| = q \end{aligned} \right.$$

$$= 9 \times 10^9 \times \frac{(q \times 10^{-9}) \times (3 \times 10^{-9})}{(0.1\sqrt{2})^2} = 13/5 |q| \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$10^{-6} \text{ N} = 1 \mu\text{N} \rightarrow F_{14} = F_{34} = 1/25 |q| \mu\text{N}$$

واضح است که $\vec{F}_{14}$ و $\vec{F}_{34}$ بر هم عمودند؛ بنابراین: $F' = \sqrt{2} F_{14} = 1/25\sqrt{2} |q| \mu\text{N}$

گام ۴ در پایان دو مقدار به دست آمده برای F' را برابر قرار می‌دهیم تا به دست آید:

$$\begin{aligned} 1/25\sqrt{2} |q| &= 5/4 \\ \Rightarrow |q| &= \frac{5/4}{1/25\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ nC} \\ q < 0 &\rightarrow q = -2\sqrt{2} \text{ nC} \end{aligned}$$

گزینه ۴

استراتژی در برخی تست‌ها، باید پس از ایجاد تغییرات در بخشی از مدار (مانند باز و بسته کردن کلید)، تغییرات برخی کمیت‌ها را به صورت کیفی تحلیل کنیم. در این تست‌ها مراحل زیر را انجام دهید:

۱ بررسی تغییرات کیفی مقاومت معادل مدار (R_{eq}):

♦ با تغییر وضعیت کلید، اگر یک مقاومت به صورت متوالی به مدار اضافه شود، R_{eq} افزایش و اگر یک مقاومت به صورت متوالی از مدار حذف شود، R_{eq} کاهش می‌یابد.

♦ با تغییر وضعیت کلید، اگر یک مقاومت به صورت موازی به مدار اضافه شود، R_{eq} کاهش و اگر یک مقاومت به صورت موازی از مدار حذف شود، R_{eq} افزایش می‌یابد.

۲ بررسی تغییرات کیفی جریان اصلی مدار (I): با توجه به رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ ، تغییرات برعکس تغییرات R_{eq} است.

$$R_{eq} = \frac{\lambda \times 2}{\lambda + 2} = 1/6 \Omega \quad (\text{یا: } \lambda = \frac{n}{2} \times 2 \Rightarrow R_{eq} = \frac{\lambda}{\frac{n}{2} + 1} = 1/6 \Omega)$$

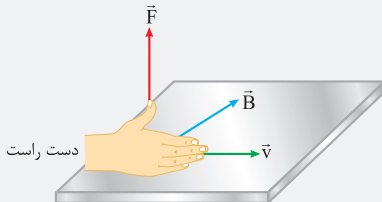
توان مصرفی کل مدار برابر با توان مصرفی مقاومت معادل است. اختلاف پتانسیل دو

$$P_{کل} = \frac{\varepsilon^2}{R_{eq}} = \frac{(24)^2}{1/6} = 360 \text{ W} \quad \text{سر مقاومت معادل برابر با } \varepsilon = 24 \text{ V} \text{ است؛ بنابراین:}$$

۶۶- گزینه ۱

درس‌نامه قاعده دست راست برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره:

طبق این قاعده، اگر چهار انگشت باز دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد. (شکل مقابل را ببینید.)

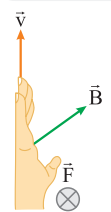


اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

علامت بار ذره	جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره
مثبت	قاعده دست راست
منفی	قاعده دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

نکته بار پوزیترون مثبت است.

برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر پوزیترون، کافی است از قاعده دست راست استفاده کنیم. چون بار پوزیترون مثبت است، مطابق شکل مقابل، چهار انگشت باز دست راست را در جهت $\vec{v}$ قرار می‌دهیم به طوری که بردار $\vec{B}$ از کف دست خارج شود. در این حالت شست دست، جهت $\vec{F}$ را نشان می‌دهد که در جهت درون‌سو ($\otimes$) بوده است.



۶۷- گزینه ۴

درس‌نامه اندازه میدان مغناطیسی در مرکز حلقه حامل جریان:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \rightarrow \text{شعاع حلقه} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}} \quad (\text{تراوایی مغناطیسی خلأ})$$

میدان مغناطیسی در مرکز هر یک از حلقه‌ها (نقطه O) را به دست می‌آوریم:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 1/5}{2 \times (18 \times 10^{-2})} = 5 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2R'} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 1/5}{2 \times (22/5 \times 10^{-2})} = 4 \times 10^{-6} \text{ T}$$

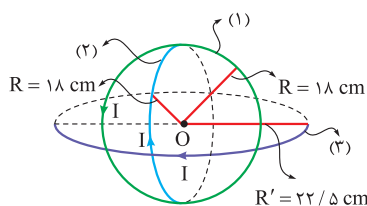
چون سطح حلقه‌ها، دایره‌ها بر یکدیگر عمود است، بردارهای میدان مغناطیسی در مرکز مشترک حلقه‌ها (نقطه O) یعنی $\vec{B}_1$ ، $\vec{B}_2$ و $\vec{B}_3$ نیز دایره‌ها بر یکدیگر عمودند (می‌توانید با تعیین جهت $\vec{B}_1$ ، $\vec{B}_2$ و $\vec{B}_3$ به کمک قاعده دست راست، به این نتیجه برسید).

یادآوری اندازه برای سه بردار $\vec{B}_1$ ، $\vec{B}_2$ و $\vec{B}_3$ که دایره‌ها بر یکدیگر عمودند از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

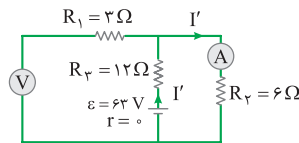
$$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}$$

بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه O را محاسبه می‌کنیم:

$$B_O = \sqrt{(5 \times 10^{-6})^2 + (5 \times 10^{-6})^2 + (4 \times 10^{-6})^2} = 10^{-6} \sqrt{25 + 25 + 16} = \sqrt{66} \times 10^{-6} \text{ T}$$



گام ۱ در حالت دوم، ولت‌سنج باز هم اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_p را نشان می‌دهد؛ پس:



(ب)

گام ۲ عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد از ۷ A به ۳/۵ A رسیده؛ یعنی ۳/۵ تغییر کرده و عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد از ۴۲ V به ۲۱ V رسیده؛ یعنی ۲۱ V تغییر کرده است.

۶۵- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ مطابق شکل روبه‌رو، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت متوالی (سری) به هم متصل‌اند:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

۲ مطابق شکل روبه‌رو، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به هم متصل‌اند:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

اگر مقاومت بزرگ‌تر، n برابر مقاومت کوچک‌تر باشد:

$$R_{eq} = \frac{\text{مقاومت بزرگ‌تر}}{n+1}$$

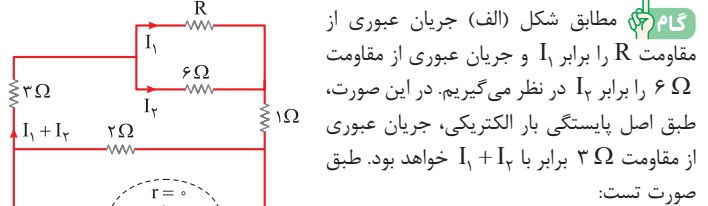
نسبت جریان عبوری از مقاومت‌ها برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

اصل پایستگی بار الکتریکی:

۳ اگر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R برابر با V و جریان عبوری از آن برابر با I باشد، توان مصرفی در این مقاومت از روابط مقابل به دست می‌آید:

$$P_R = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$



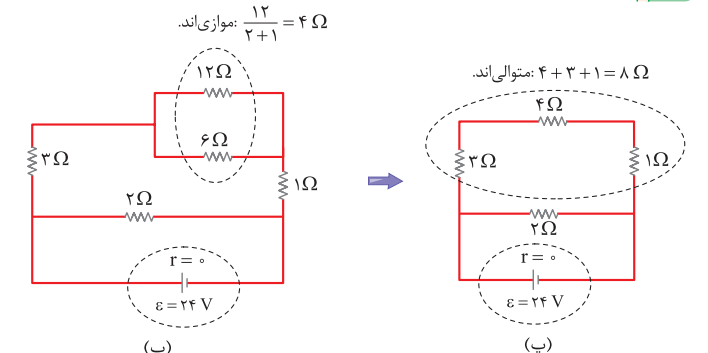
(الف)

$$\Rightarrow (I_1 + I_2)^2 = \frac{9}{4} I_2^2 \rightarrow I_1 + I_2 = \frac{3}{2} I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} I_2$$

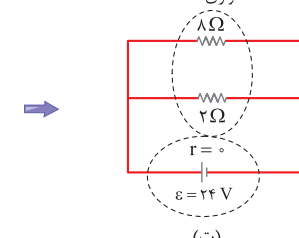
گام ۲ مقاومت‌های 6Ω و R موازی‌اند؛ بنابراین:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{6}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} I_2 = \frac{6}{R} \Rightarrow R = 12 \Omega$$

گام ۳ مطابق با شکل‌های (ب) تا (ت)، مقاومت معادل مدار را محاسبه می‌کنیم:



موازی‌اند.



(ت)

۷۰- گزینه ۴

درس نامه ۱ انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v ، از رابطه زیر به دست می آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

۲ کار نیروی وزن جسم برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg\Delta h$$

۳ در رابطه بالا، اگر جسم از سطح زمین دور شود، $\Delta h > 0$ و اگر جسم به سطح زمین نزدیک شود، $\Delta h < 0$ است.

۴ قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_f - K_i$$

۵ رابطه بالا برای هر نوع مسیری برقرار است.

۶ انرژی جنبشی در آغاز و پایان مسیر مهم است و این که در طول مسیر انرژی جنبشی جسم چگونه تغییر کرده، اهمیتی ندارد.

۷ انرژی مکانیکی یک جسم برابر با مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل آن است:

$$E = K + U$$

۸ قانون پایستگی انرژی: کار نیروهای اتلافی مانند اصطکاک و مقاومت هوا برابر با تغییر انرژی مکانیکی است:

$$W_f = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

۹ کار نیروی مقاومت هوا را می خواهیم:

۱۰ قضیه کار - انرژی جنبشی: هنگام حرکت توپ، دو نیروی وزن و مقاومت هوا روی توپ کار انجام می دهند:

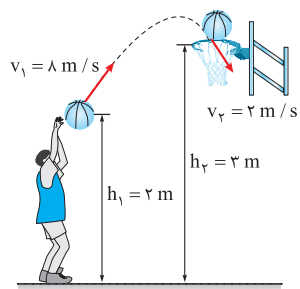
$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_f + W_{mg} = \Delta K \Rightarrow W_f + (-mg\Delta h) = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow W_f - m \times 10 \times (3 - 2) = \frac{1}{2}m(2^2 - 8^2) \Rightarrow W_f = -30m + 10m = -20m$$

۱۱ قانون پایستگی انرژی:

$$\Rightarrow W_f = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + mg\Delta h = \frac{1}{2}m(2^2 - 8^2) + m \times 10 \times (3 - 2)$$

$$= -30m + 10m = -20m$$



۱۲ درصد اتلاف انرژی به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{|W_f|}{K_i} \times 100 = \frac{20m}{\frac{1}{2}m(8)^2} \times 100 = 62.5\%$$

۷۱- گزینه ۱

۱۳ رابطه تغییر طول جسم با تغییر دما را بر هر دو میله در نظر بگیرید و در نهایت اختلاف آن ها را برابر با 3 mm قرار داده و طول اولیه میله ها را به دست بیاورید.

۱۴ درس نامه محاسبه اختلاف طول دو میله غیرهم جنس با طول اولیه یکسان، پس از تغییر دمای یکسان:

$$\Delta L = L_1(\alpha_A - \alpha_B)\Delta\theta$$

با توجه به این که با افزایش دما، طول هر دو میله افزایش می یابد و ضریب انبساط طولی میله مسی از میله آهنی بیشتر است، پس افزایش طول میله مسی به اندازه 3 mm از افزایش طول میله آهنی بیشتر است؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\Delta L = 3 \text{ mm} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{\Delta L = L_1(\alpha_{\text{مس}} - \alpha_{\text{آهن}})\Delta\theta}{L_1 = L} \rightarrow L \times (\alpha_{\text{مس}} - \alpha_{\text{آهن}}) \times \Delta\theta = 3 \times 10^{-3}$$

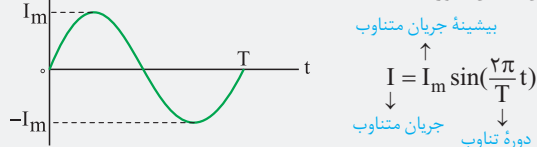
$$\Rightarrow L \times (1/8 \times 10^{-5} - 1/2 \times 10^{-5}) \times 125 = 3 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow L \times 0.6 \times 10^{-5} \times 125 = 3 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

۶۸- گزینه ۴

۱۵ درس نامه ۱ معادله و نمودار جریان

متناوب برحسب زمان به این صورت است:



۱۶ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا، به جریان الکتریکی

گذرنده از آن را مقاومت الکتریکی می گوئیم و رابطه آن به صورت مقابل است: $R = \frac{V}{I}$

۱۷ گام از روی نمودار به راحتی می توان فهمید که: $I_m = 12 \text{ A}$ و $T = 0.2 \text{ s}$

حالا معادله جریان متناوب گذرنده از رسانا را برحسب زمان به دست می آوریم:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow I = 12 \sin\left(\frac{2\pi}{0.2}t\right) = 12 \sin 10\pi t$$

۱۸ گام مقدار جریان در لحظه $t = \frac{1}{30} \text{ s}$ را محاسبه کنیم:

$$I = 12 \sin\left(10\pi \times \frac{1}{30}\right) \xrightarrow{\sin \frac{\pi}{3} = 1} I = 12 \text{ A}$$

۱۹ روش لحظه $t = \frac{1}{30} \text{ s}$ برابر با $\frac{T}{4}$ (با $\frac{0.2}{4} = \frac{1}{30}$) است. با توجه به نمودار، در لحظه $\frac{T}{4}$:

$$I = I_m = 12 \text{ A}$$

۲۰ گام مقدار مقاومت R برابر است با: $R = \frac{V}{I} = \frac{30 \text{ V}}{12 \text{ A}} = 2.5 \Omega$

۶۹- گزینه ۳

۲۱ درس نامه ۱ به اختلاف فشار مطلق گاز درون

مخزن و فشار هوای محیط، فشار پیمانه ای گفته می شود.

در شکل مقابل برای به دست آوردن فشار پیمانه ای

گاز موجود در مانومتر از هم فشاری نقاط هم تراز A و

B کمک می گیریم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P = P_0 + \rho gh \Rightarrow P - P_0 = \rho gh$$

(فشار پیمانه ای)

۲۲ برای محاسبه فشار ستونی از مایع برحسب سانتی متر جیوه از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$P_{\text{مایع}} (\text{cmHg}) = \frac{\rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} (\text{cm})}{\rho_{\text{جیوه}}}$$

۲۳ گام اصل هم فشاری نقاط هم تراز

در یک مایع ساکن را برای نقاط A و

B که در شکل روبه رو نشان داده ایم،

می نویسیم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + P_{\text{جیوه}} = P_0 + P_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} - P_0 = P_{\text{مایع}} - P_{\text{جیوه}}$$

اختلاف فشار مطلق گاز و فشار هوا ($P_{\text{گاز}} - P_0$) همان فشار پیمانه ای (P_g) گاز است؛ بنابراین:

$$P_g (\text{cmHg}) = P_{\text{مایع}} (\text{cmHg}) - P_{\text{جیوه}} (\text{cmHg})$$

$$\frac{h_{\text{جیوه}} = 35 \text{ cm}}{P_{\text{جیوه}} (\text{cmHg}) = 35 \text{ cmHg}} \rightarrow -20 = P_{\text{مایع}} (\text{cmHg}) - 35 \Rightarrow P_{\text{مایع}} (\text{cmHg}) = 15 \text{ cmHg}$$

۲۴ گام h به صورت زیر به دست می آید:

$$P_{\text{مایع}} (\text{cmHg}) = \frac{\rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} (\text{cm})}{\rho_{\text{جیوه}}} \Rightarrow 15 = \frac{1 \times (h + 35)}{13.6}$$

$$\Rightarrow h + 35 = 60 \Rightarrow h = 25 \text{ cm}$$

۷۲ - گزینه ۲

درس نامه ۱ گرمای لازم برای تغییر دما:

$$Q = mc(\theta_f - \theta_i)$$

جرم جسم
دمای ثانویه
دمای اولیه
گرمای ویژه جسم

۲ گرمای لازم برای تغییر حالت از جامد به مایع: گرمای نهان ذوب جسم

$$Q_F = mL_F$$

جرم جسم

گام ۱ برای این که نیمی از قطعه یخ ذوب شود، ابتدا باید دمای تمام قطعه یخ (۲ kg) از 0°C به -10°C برسد و سپس نیمی از آن (۱ kg) تبدیل به آب 0°C شود. با این توضیحات، طرحواره گرمایی این فرایند مطابق شکل زیر است:

$$-10^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_1 = mc\Delta\theta} 0^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_2 = \frac{m}{2}L_F} 0^\circ\text{C} \text{ آب } 1 \text{ kg} + 0^\circ\text{C} \text{ یخ } 1 \text{ kg}$$

گام ۳ براساس طرحواره بالا، $Q_1 + Q_2$ را محاسبه می کنیم:

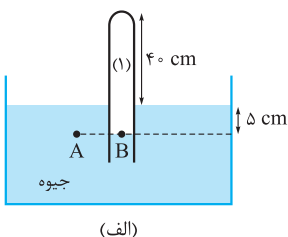
$$Q_t = Q_1 + Q_2 = mc\Delta\theta + \frac{m}{2}L_F$$

$$= 2 \times 2 \times 1 \times (-10) + \frac{2}{2} \times 336 = 42 + 336 \Rightarrow Q_t = 378 \text{ kJ}$$

تله در این تست باید به این موضوع توجه کنید که ابتدا دمای کل قطعه یخ به 0°C می رسد و سپس شروع به ذوب شدن می کند. اگر به اشتباه تصور کنید که نیمی از قطعه یخ در دمای 0°C می ماند و نیم دیگر آن ذوب می شود، جوابتان به اشتباه ۱ خواهد شد.

۷۳ - گزینه ۲

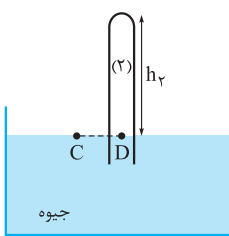
گام ۱ در حالت اول، با توجه به شکل (الف)، فشار و حجم هوای محبوس را محاسبه می کنیم:



$$V_1 = Ah_1 = 4\delta A$$

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0(\text{cmHg}) + \delta = P_1$$

$$\Rightarrow P_1 = 75 + \delta = 80 \text{ cmHg}$$



گام ۲ حالت دوم، مطابق شکل (ب) است. برای این حالت هم داریم:

$$V_2 = Ah_f$$

$$P_C = P_D \Rightarrow P_0 = P_2 \Rightarrow P_2 = 75 \text{ cmHg}$$

گام ۳ در فرایند هم دما برای مقدار معینی گاز کامل، حاصل PV ثابت می ماند:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow 80 \times 4\delta A = 75 \times Ah_f \Rightarrow h_f = \frac{80 \times 4\delta A}{75 \times A} = 42.67 \text{ cm}$$

همان طور که مشخص است، ارتفاعی از لوله که بالاتر از سطح جیوه درون ظرف قرار دارد از 40 cm به 42.67 cm رسیده است و این یعنی لوله را باید نسبت به حالت اول، 2.67 cm بالا ببریم.

۷۴ - گزینه ۴

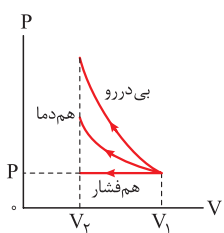
درس نامه ۱ سطح زیر نمودار P-V هر فرایندی برابر

$$S = |W_{AB}|$$

با قدر مطلق کار انجام شده در آن فرایند است:

۲ در فرایند بی دررو، گرمایی بین گاز و محیط مبادله نمی شود ($Q=0$)؛ بنابراین:

$$\Delta U = W$$



نمودار P-V سه فرایند را رسم می کنیم. چون فرایندها تراکمی است، کار انجام شده روی گاز در هر سه فرایند مثبت است. هم چنین مساحت سطح زیر نمودار P-V بیانگر کار انجام شده روی گاز است؛ بنابراین:

$$S_{\text{بی دررو}} < S_{\text{هم دما}} < S_{\text{هم فشار}}$$

بنابرین (الف) $W_{\text{بی دررو}} < W_{\text{هم دما}} < W_{\text{هم فشار}} \Rightarrow$

در فرایند هم دما، هم کار انجام می شود و هم گرما مبادله می شود، یعنی هیچ کدام از این کمیت ها صفر نیستند. (نادرستی ب)

$$Q=0 \Rightarrow \Delta U = W \xrightarrow{W>0} \Delta U > 0$$

در فرایند بی دررو:

$$\Delta U = 0$$

در فرایند هم دما:

$$PV = nRT \xrightarrow{P:\text{ثابت}, V:\text{کاهش}} T: \text{کاهش} \Rightarrow U: \text{کاهش}$$

در فرایند هم فشار:

(درستی ت)

پس انرژی درونی گاز فقط در فرایند بی دررو افزایش می یابد. (درستی پ)

۷۵ - گزینه ۱

استراتژی برای حل تست های مربوط به چرخه ترمودینامیکی:

۱ چرخه ΔU که برابر با مجموع ΔU فرایندها است را برابر صفر قرار دهید. ۲ با توجه به ویژگی فرایندها، برخی کمیت های موجود در معادله صفر می شود. (برای مثال در فرایند هم حجم $W=0$ و در فرایند بی دررو $Q=0$ است). ۳ به کمک داده های تست، معادله را حل کرده و خواسته تست را به دست آورید.

درس نامه ۱ قانون اول ترمودینامیک:

تغییرات انرژی درونی گاز

$$\Delta U = Q + W \rightarrow \text{کافی که محیط روی گاز انجام می دهد.}$$

گرمایی که گاز می گیرد.

۲ در فرایند هم حجم ($\Delta V=0$) کار مبادله شده بین گاز و محیط برابر صفر است؛ بنابراین:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W=0} \Delta U = Q$$

۳ در فرایند هم دما ($\Delta T=0$):

الف) چون تغییر دما نداریم، تغییرات انرژی درونی گاز برابر صفر است:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U=0} Q = -W$$

ب) حاصل PV در طول فرایند ثابت است: ثابت: $PV = nRT \xrightarrow{T:\text{ثابت}} PV$

۴ کار در فرایند هم فشار: $W = -P\Delta V$

۵ در یک چرخه ترمودینامیکی، چون گاز پس از طی چند فرایند متوالی دوباره به حالت اولیه اش بازمی گردد، تغییرات انرژی درونی گاز برابر صفر است؛ یعنی: چرخه $\Delta U = 0$

گام ۱ با توجه به نمودار، فرایند BC هم حجم است، پس:

$$W_{BC} = 0$$

هم چنین فرایند CA هم دما است، پس:

$$\Delta U_{CA} = 0$$

$$P_A V_A = P_C V_C \Rightarrow 20 V_A = 8 \times 10 \Rightarrow V_A = 4 \text{ L}$$

گام ۲ تغییر انرژی درونی چرخه برابر صفر است؛ بنابراین:

$$\Delta U_{ABCA} = 0 \Rightarrow \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta U_{CA}=0} W_{AB} + Q_{AB} + W_{BC} + Q_{BC} = 0$$

$$\xrightarrow{W_{BC}=0} W_{AB} + Q_{AB} + Q_{BC} = 0 \Rightarrow W_{AB} + Q_{ABC} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{ABC} = -W_{AB}$$

گام ۳ ما به دنبال Q_{ABC} هستیم، پس ابتدا باید W_{AB} را محاسبه کنیم. فرایند AB

$$W_{AB} = -P\Delta V = -P(V_B - V_A)$$

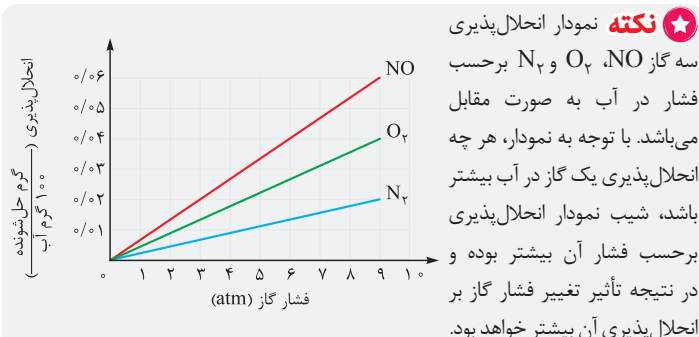
$$= -(20 \times 10^5) \times (10 - 4) \times 10^{-3} = -12000 \text{ J} \xrightarrow{10^3 \text{ J} = 1 \text{ kJ}} W_{AB} = -12 \text{ kJ}$$

$$Q_{ABC} = -W_{AB} = 12 \text{ kJ}$$

علامت مثبت بیانگر آن است که گاز گرما دریافت کرده است.

در جدول تناوبی، از بالا به پایین، خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش و خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد؛ بنابراین این عبارت فقط در مورد دو فلز هم‌گروه درست است، نه همهٔ عنصرهای جدول! (فلزی که در دورهٔ پایین‌تر جدول تناوبی قرار دارد، واکنش‌پذیری بالاتری خواهد داشت.)

۷۷- گزینه ۱

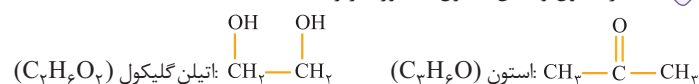


NO > O_۲ > N_۲ مقایسهٔ شیب نمودار انحلال‌پذیری - فشار
 NO > O_۲ > N_۲ مقایسهٔ انحلال‌پذیری گازها
 NO > O_۲ > N_۲ مقایسهٔ تأثیر فشار بر انحلال‌پذیری گازها

هر چه انحلال‌پذیری یک گاز در آب بیشتر باشد، اثر فشار بر انحلال‌پذیری آن گاز بیشتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها: دستگاه اندازه‌گیری قند خون (گلوکومتر)، میلی‌گرم (mg) گلوکز را در هر دسی‌لیتر (dL) از خون نشان می‌دهد. گازهای پروپان (C_۳H_۸) و اتان (C_۲H_۶)، هر دو دارای مولکول‌های ناقطبی هستند، اما گاز پروپان (C_۳H_۸) به دلیل داشتن جرم مولی بیشتر نسبت به اتان، دارای نقطهٔ جوش بیشتری نسبت به این گاز بوده و در شرایط یکسان، راحت‌تر به مایع تبدیل می‌شود.

۴ ساختار استون و اتیلن‌گلیکول به صورت زیر است:



هر دو ماده، دارای مولکول‌های قطبی هستند، اما دقت کنید که در ساختار استون، H متصل به FON وجود ندارد و نیروی بین مولکولی آن، از نوع وان‌دروالسی است، اما در ساختار اتیلن‌گلیکول، به دلیل حضور پیوندهای O—H، نیروی جاذبهٔ بین مولکولی از نوع پیوند هیدروژنی است.

۷۸- گزینه ۱

درس‌نامه جدول زیر شرایط واکنش هالوژن‌ها را با گاز H_۲ در دماهای مختلف نمایش می‌دهد:

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای C° -۲۰۰ به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای C° ۲۰۰ واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از C° ۴۰۰ واکنش می‌دهد.

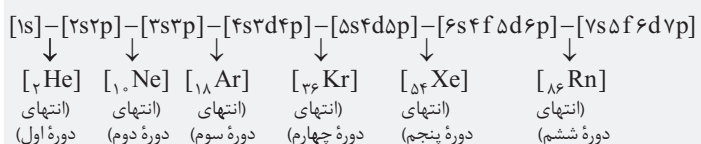
۴۰۰ کلوین معادل ۱۲۷ (۱۲۷ = ۲۷۳ - ۴۰۰) درجهٔ سلسیوس است. برم و ید نمی‌توانند در دمای C° ۱۲۷ با گاز هیدروژن واکنش دهند. برم در دمای C° ۲۰۰ و ید در دمای بالاتر از C° ۴۰۰ می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.

شیمی

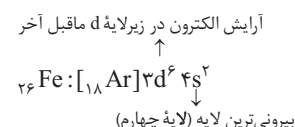
۷۶- گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

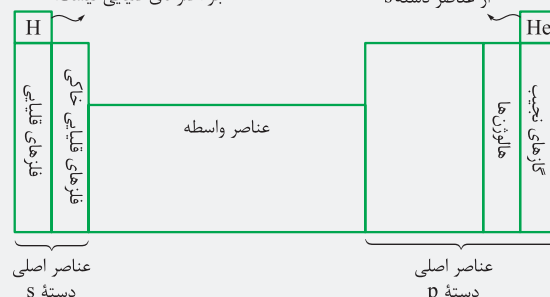
نکته برای رسم آرایش الکترونی فشردهٔ عناصر دوره‌های دوم تا هفتم جدول تناوبی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



این گزینه، غلطه! مثلاً در آرایش الکترونی فشردهٔ عناصر دستهٔ d، علاوه بر نماد شیمیایی گاز نجیب دورهٔ قبل و آرایش الکترون‌ها در بیرونی‌ترین لایه (ns)، آرایش الکترون‌ها در زیرلایهٔ (n-۱)d نیز نمایش داده می‌شود:



نکته در شکل زیر، نمای کلی جدول دوره‌ای مشخص شده است: از عناصر دستهٔ s گروه اول که جزء فلزهای قلیایی نیست.

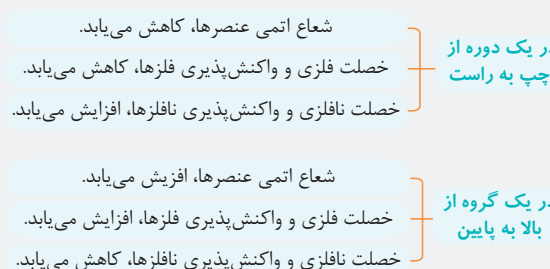


دوره‌های دوم تا هفتم جدول دوره‌ای، با یک فلز قلیایی در گروه اول شروع شده و به یک گاز نجیب در گروه ۱۸ ختم می‌شوند؛ اما در دورهٔ اول، فلز قلیایی وجود ندارد و این دوره، با عنصر هیدروژن در گروه اول شروع شده و به گاز نجیب هلیم در گروه ۱۸ ختم می‌شود.

۳ بیرونی‌ترین لایهٔ اشغال‌شدهٔ اتم عنصری با عدد اتمی ۳۴، لایهٔ چهارم است، در آرایش الکترونی این اتم در این لایه ۶ الکترون وجود دارد:

${}^{۳۴}\text{Se} : [{}_{18}\text{Ar}] 3d^10 4s^2 4p^4$
 بیرونی‌ترین لایهٔ اشغال‌شده

نکته نمودار زیر روند تغییر واکنش‌پذیری فلزها و نافلزها در جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد.



گام ۷ جرم آب (H_2O) تولیدشده در واکنش (II) و جرم گاز کربن دی‌اکسید (CO_2) تولیدشده در واکنش (I) را حساب می‌کنیم:

$$11/2 \text{ L } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22/4 \text{ L } CO_2} \times \frac{3 \text{ mol } H_2O}{2 \text{ mol } CO_2} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} = 13/5 \text{ g } H_2O$$

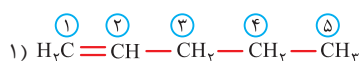
$$90 \text{ g } C_6H_{12}O_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{180 \text{ g } C_6H_{12}O_6} \times \frac{2 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{44 \text{ g } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 44 \text{ g } CO_2$$

بنابراین، نسبت خواسته‌شده به تقریب برابر با $3/5$ است.

۸۲- گزینه ۲

شفاف‌سازی آلکن‌ها هیدروکربن‌هایی با یک پیوند $C=C$ هستند و فرمول عمومی آن‌ها C_nH_{2n} می‌باشد، بنابراین C_5H_{10} که دارای یک پیوند $C=C$ است، آلکن ۵کربنه است ولی باید ایزومرهای ساختاری آن را رسم کنیم.

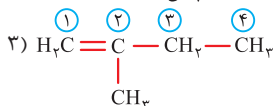
با تغییر جایگاه پیوند دوگانه در زنجیر اصلی و همچنین تغییر جایگاه شاخه‌های (فرعی، ساختارهای متفاوت ممکن را رسم می‌کنیم:



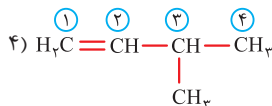
۱- پنتن



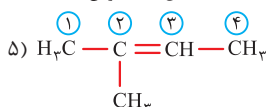
۲- پنتن



۲- متیل - ۱- بوتن



۳- متیل - ۱- بوتن



۲- متیل - ۲- بوتن

۸۳- گزینه ۳

نکته دامنۀ تغییرات عدد اکسایش عناصرها در برخی گروه‌های جدول به صورت زیر است:

شماره گروه	۱ (به‌جز هیدروژن)	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶ (به‌جز اکسیژن)	۱۷ (به‌جز فلوئور)
پایین‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	۰	-۴	-۳	-۲	-۱
بالاترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۳	+۴	+۵	+۶	+۷

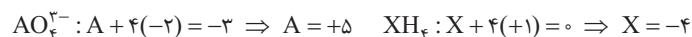
به طور کلی در همه فلزها، پایین‌ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (در حالت آزاد). برای عنصرهای گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ (به‌جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

۱۸- شماره گروه = پایین‌ترین عدد اکسایش

یکان شماره گروه - ۱۰ = شماره گروه = بالاترین عدد اکسایش

توجه: عدد اکسایش هیدروژن می‌تواند صفر، -۱ و +۱ باشد. دامنۀ تغییرات عدد اکسایش اکسیژن از -۲ تا +۲ است و عدد اکسایش فلوئور تنها می‌تواند اعداد صفر (در F_2) و -۱ (در بقیۀ گونه‌ها) باشد.

ابتدا باید عدد اکسایش نافلز A و عنصر X را در گونه‌های داده‌شده، تعیین کنیم:



با توجه به اعداد اکسایش به‌دست‌آمده، نافلز A و عنصر X به ترتیب در گروه‌های ۱۵ و ۱۴ جدول تناوبی قرار دارند.

بررسی گزینه‌ها:

① شماره گروه عنصر X، یعنی ۱۴ از شماره گروه نافلز A، یعنی ۱۵ کوچک‌تر است.

۷۹- گزینه ۳

برای توصیف یک نمونه گاز، علاوه بر مقدار، باید دما و فشار آن نیز مشخص باشد. فقط در ④ است که هم مقدار (۱ مول)، هم دما (300 K) و هم فشار گاز (۱ atm) مشخص است.

۸۰- گزینه ۳

نکته ۱ در لایۀ تروپوسفر با افزایش ارتفاع به ازای هر کیلومتر از سطح زمین، دما در حدود 6°C کاهش می‌یابد، به طوری که دما از 14°C در سطح زمین به حدود -55°C در انتهای لایه می‌رسد.

اگر دما در سطح زمین را θ و دما در ارتفاع h کیلومتری را θ در نظر بگیریم، رابطه محاسبۀ دما در ارتفاع‌های مختلف لایۀ تروپوسفر را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\theta = -6h + \theta_0 \Rightarrow \Delta\theta = \Delta T = -6h$$

۲ میزان تغییر دما در مقیاس سلسیوس و کلونین با هم برابر است: یعنی مثلاً اگر در فرایندی دما 10°C کاهش یافته باشد، انگار دما به اندازه 10 K کاهش یافته است (و نه $10 + 273$) کلونین!

گام ۱ دمای سطح زمین را به کلونین تبدیل می‌کنیم: $T(\text{K}) = 14^\circ \text{C} + 273 = 287 \text{ K}$

گام ۲ اختلاف دمای بین سطح زمین و ارتفاع مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta T = 287 - 239 = 48 \text{ K}$$

گام ۳ فشار هوا در ارتفاع مورد نظر را حساب می‌کنیم: $\frac{\Delta T}{6} = \frac{48}{6} = 8 \text{ km}$ با افزایش ارتفاع به ازای هر 2000 m یا 2 km ، فشار هوا تقریباً ۲۰ درصد کاهش می‌یابد؛ یعنی به ۸۰ درصد نقطۀ قبلی می‌رسد:

$$1 \text{ atm} \xrightarrow{2 \text{ km}} 0/8 \text{ atm} \xrightarrow{2 \text{ km}} 0/8 \times 0/8 = 0/64 \text{ atm}$$

$$\xrightarrow{2 \text{ km}} 0/64 \times 0/8 = 0/512 \text{ atm} \xrightarrow{2 \text{ km}} 0/512 \times 0/8 = 0/4 \text{ atm}$$

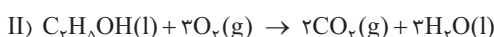
گام ۴ اختلاف فشار هوا بین سطح زمین و ارتفاع مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$1 - 0/4 = 0/6 \text{ atm}$$

بنابراین اختلاف فشار هوا در این ارتفاع با فشار هوا در سطح زمین تقریباً ۰/۶ atm است. **تله** اگر اشتباه کنید و به جای محاسبۀ اختلاف فشار، خود فشار نهایی را به عنوان پاسخ در نظر بگیرید، به اشتباه به ④ می‌رسید.

۸۱- گزینه ۲

گام ۱ معادله واکنش‌های انجام‌شده را موازنه می‌کنیم:



گام ۲ مقدار اتانول حاصل از تخمیر بی‌هوازی 90°C گرم گلوکز در واکنش (I) و مقدار اتانول مصرف‌شده برای تولید $11/2$ لیتر گاز CO_2 در واکنش (II) در شرایط استاندارد (STP) را به دست می‌آوریم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم مولی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{90}{1 \times 180} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ mol } C_2H_5OH$$

$$\frac{\text{حجم}}{\text{حجم} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{11/2}{2 \times 22/4} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = 0/25 \text{ mol } C_2H_5OH$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

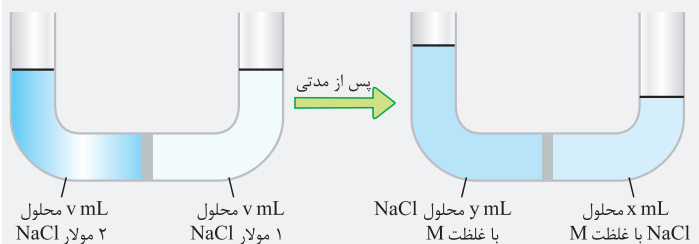
$$90 \text{ g } C_6H_{12}O_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{180 \text{ g } C_6H_{12}O_6} \times \frac{2 \text{ mol } C_2H_5OH}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} = 1 \text{ mol } C_2H_5OH$$

$$11/2 \text{ L } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22/4 \text{ L } CO_2} \times \frac{1 \text{ mol } C_2H_5OH}{2 \text{ mol } CO_2} = 0/25 \text{ mol } C_2H_5OH$$

گام ۳ از یک مول اتانول تولیدشده در واکنش (I)، $0/25$ مول در واکنش (II) مصرف شده است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{شمار مول‌های اتانول مصرف‌شده در واکنش (II)}}{\text{شمار کل مول‌های اتانول تولیدشده در واکنش (I)}} = \frac{0/25}{1} \times 100 = 25\%$$

غلظت را جابه‌جا می‌شوند تا جایی که غلظت محلول‌ها در دو سمت غشا با یکدیگر برابر شود (البته با صرف نظر کردن از فشار ناشی از اختلاف ارتفاع ستون محلول‌ها در دو سمت لوله U شکل).



با به‌ماسبه کوهپولو می‌شه فهمید محلول سمت چپ غشای نیمه‌تراوا رقیق‌تر است و آب از سمت چپ به سمت راست غشا جابه‌جا می‌شود. فرض کنید جرم مولی CaBr_2 ، a گرم بر مول باشد:

$$\frac{20 \text{ g}}{a \text{ g.mol}^{-1}} = \frac{400}{a} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{20}{1000} \text{ L} \Rightarrow \text{آب از سمت چپ به سمت راست جابه‌جا می‌شود.}$$

$$\frac{30 \text{ g}}{a \text{ g.mol}^{-1}} = \frac{500}{a} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{30}{1000} \text{ L} \Rightarrow \text{غلظت مولی محلول سمت راست}$$

تغییر ارتفاع محلول‌ها در دو سمت لوله U شکل تا زمانی ادامه دارد که غلظت دو محلول با هم برابر شود. فرض کنید X میلی‌لیتر آب از محلول سمت چپ خارج و در نتیجه X میلی‌لیتر آب به محلول سمت راست اضافه شود. حالا غلظت مولی دو محلول را برابر قرار می‌دهیم. دقت کنید که تعداد مول حل‌شونده در دو طرف غشا تغییری نمی‌کند.

$$\text{غلظت مولی محلول سمت راست} = \text{غلظت مولی محلول سمت چپ}$$

$$\frac{20}{a} = \frac{30}{a} \Rightarrow \frac{20}{0.05 - x} = \frac{30}{0.06 + x} \Rightarrow 0.12 + 2x = 0.15 - 3x \Rightarrow 5x = 0.03$$

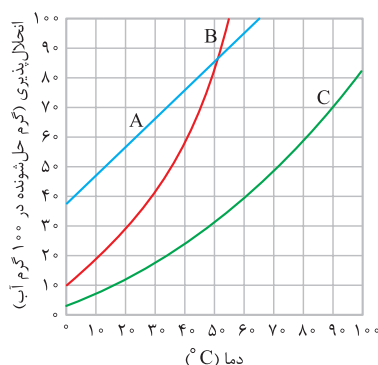
$$\Rightarrow x = \frac{0.03}{5} \text{ L} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = 6 \text{ mL}$$

گزینه ۳ - ۸۶

بررسی گزینه‌ها:

۱ اگر انحلال‌پذیری نمک C را برابر X در نظر بگیریم و بخواهیم درصد جرمی نمک C برابر ۵٪ باشد، X برابر ۱۰۰ خواهد شد، یعنی باید ۱۰۰ گرم از این نمک را در ۱۰۰ گرم آب حل کنیم:

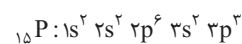
$$\frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = 5 \Rightarrow \frac{X}{100 + X} \times 100 = 5 \Rightarrow \frac{X}{100 + X} = 0.05 \Rightarrow 2X = 100 + X \Rightarrow X = 100$$



با توجه به نمودار داده‌شده، در دمای 0°C تا 100°C انحلال‌پذیری C همیشه کمتر از ۱۰۰ گرم نمک در ۱۰۰ گرم آب است، پس در این محدوده دمایی نمی‌توانیم محلول سیرشده نمک C با درصد جرمی ۵٪ تهیه کنیم.

۲ با توجه به نمودار، دمای حدود 50°C ، محل تلاقی دو منحنی A و B است. بعد از این دما، منحنی A پایین‌تر از منحنی B قرار دارد؛ بنابراین بعد از دمای 50°C ، هر نقطه روی منحنی A که یک محلول سیرشده A در آن دما است، نقطه‌ای پایین‌تر از منحنی B که یک محلول سیرشده B در آن دما است، خواهد بود پس دما (m) باید بیشتر از 50°C باشد نه کمتر!

۳ اگر نافلز A در دوره سوم جدول تناوبی قرار داشته باشد، همان عنصر ^{31}P خواهد بود که در آرایش الکترونی آن، $9 = 3 + 6$ الکترون در زیرلایه‌های p ($l=1$) اتم آن وجود دارد:



۴ اکسندترین عنصر (عنصری با بیشترین تمایل به جذب الکترون) در هر دوره جدول تناوبی، عنصر گروه ۱۷ می‌باشد.

۵ اگر عنصر X در دوره سوم جدول تناوبی قرار داشته باشد، همان عنصر ^{28}Si خواهد بود که شبه‌فلزی شکننده است و در واکنش با دیگر اتم‌ها فقط می‌تواند الکترون به اشتراک بگذارد.

گزینه ۴ - ۸۴

عبارت‌های اول، دوم و سوم نادرست و عبارت چهارم درست است.

بررسی عبارت‌ها: عبارت اول:

$$28 / 8 \text{ g O}_2 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{32 \text{ g O}_2} \times \frac{3 \text{ mol atom O}}{1 \text{ mol O}_2} = 1 / 8 \text{ mol atom O}$$

عبارت دوم: قسمت اول عبارت درست؛ انرژی فعال‌سازی فرایند هابر، زیاد است؛ بنابراین فرایند در دماهای بالا، سرعت مناسبی خواهد داشت ولی فرایند هابر $(\text{N}_2 + 3\text{H}_2 \rightleftharpoons 2\text{NH}_3 + Q)$ گرماده است و با افزایش دما، در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین میزان پیشرفت آن در دماهای بالا، کم است.

عبارت سوم: شمار مول اتم‌ها در $5/6$ لیتر گاز نیتروژن برابر است با:

$$5/6 \text{ L N}_2 \times \frac{1/25 \text{ g N}_2}{1 \text{ L N}_2} \times \frac{1 \text{ mol N}_2}{28 \text{ g N}_2} \times \frac{2 \text{ mol atom N}}{1 \text{ mol N}_2} = 0/5 \text{ mol atom N}$$

اما شمار مول اتم‌ها در $2/8$ گرم فلز آهن (Fe) برابر است با:

$$2/8 \text{ g Fe} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{56 \text{ g Fe}} \times \frac{1 \text{ mol atom Fe}}{1 \text{ mol Fe}} = 0/5 \text{ mol atom Fe}$$

عبارت چهارم: در شرایط بهینه تولید آمونیاک به روش هابر، ۲۸ درصد مولی مخلوط را آمونیاک و در نتیجه $72 = 100 - 28$ درصد مولی مخلوط را واکنش‌دهنده‌ها تشکیل می‌دهند.

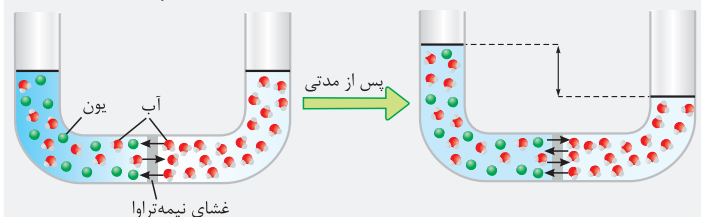
تیزبازی برای حل این تست با توجه به گزینه‌ها، اصلاً نیازی نیست که عبارت‌های اول و سوم که محاسباتی هستند رو بررسی کنیم! فقط با بررسی عبارت‌های دوم و چهارم، خیلی راحت می‌شه به جواب تست رسید.

گزینه ۳ - ۸۵

درس‌نامه اسمز

به انتشار (حرکت) مولکول‌های آب از درون یک غشای نیمه‌تراوا از سمت محلول رقیق‌تر به سمت محلول غلیظ‌تر و یا از سمت حلال خالص به سمت محلول، اسمز (گذرندگی) می‌گویند. منظور از غشای نیمه‌تراوا غشایی است که فقط اجازه عبور برخی از مولکول‌ها (در این جا یعنی مولکول‌های آب) را می‌دهد.

مثال: فرض کنید حجم‌های یکسانی از آب خالص و محلول آب‌نمک توسط غشایی نیمه‌تراوا جدا شده باشند. در این حالت، مولکول‌های آب، بیشتر از سمت آب خالص به سمت آب‌نمک حرکت می‌کنند؛ بنابراین با ورود آب به محلول، حجم محلول بیشتر شده و محلول به تدریج رقیق‌تر می‌شود. با رقیق‌تر شدن محلول، رفته‌رفته به جایی می‌رسیم که سرعت حرکت مولکول‌های آب در دو جهت برابر شده و به تعادل می‌رسد. در حالت تعادل، حرکت مولکول‌های آب درون غشا در هر دو جهت ادامه می‌یابد، اما به دلیل برابر بودن سرعت آن‌ها، غلظت و حجم محلول ثابت می‌ماند.

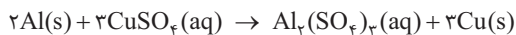


اگر در دو سمت غشای نیمه‌تراوا محلول‌هایی هم‌جنس از یک نوع حل‌شونده با غلظت‌های متفاوت وجود داشته باشد، مثلاً در دو سمت غشا، محلول‌های سدیم کلرید با غلظت‌های متفاوت وجود داشته باشد، باز هم مولکول‌های آب از سمت محلول رقیق‌تر به سمت محلول

مشاوره این مدل تست‌های مفهومی و تحلیلی در کنکورهای اخیر خیلی پرتکرار بوده‌اند. این نکته رو یادت باشه که در این جور تست‌ها که باید چندتا حالت رو برای عنصر، در نظر داشته باشی، بیشتر باید سعی کنی دنبال مثال نقض برای اون عبارت بگردی! و ببینی آیا مثال نقض پیدا می‌شه یا نه! چون احتمالاً اغلب اون حالت‌ها در اون عبارت صدق می‌کنن و فقط یکی صدق نمی‌کنه!

۸۹- گزینه ۳

معادله کامل و موازنه‌شده واکنش (II) به صورت زیر است:



در معادله فوق، اگر به جای فلز آلومینیم (Al)، فلز سدیم (Na) قرار گیرد، معادله واکنش به صورت مقابل درمی‌آید:

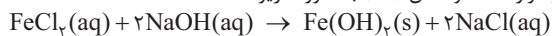
$$2\text{Na(s)} + \text{CuSO}_4\text{(aq)} \rightarrow \text{Na}_2\text{SO}_4\text{(aq)} + \text{Cu(s)}$$

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در معادله موازنه‌شده واکنش در حالت اول، برابر ۹ و در حالت دوم، برابر ۵ است.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) در فولاد مبارکه، مانند همه شرکت‌های فولاد جهان، برای استخراج آهن از کربن استفاده می‌شود:



۲) معادله کامل و موازنه‌شده واکنش (III) به صورت زیر است:



رسوب سبز رنگ

نکته رنگ رسوب‌های مهم مورد نیاز برای کنکور سراسری

با استفاده از رنگ رسوب تشکیل شده می‌توان نوع کاتیون موجود در نمونه را حدس زد.					تشخیص کاتیون با رنگ رسوب
Ba ²⁺	Ca ²⁺	Ag ⁺	Fe ³⁺	Fe ²⁺	
SO ₄ ²⁻	PO ₄ ³⁻	Cl ⁻	OH ⁻	OH ⁻	
BaSO ₄	Ca ₃ (PO ₄) ₂	AgCl	Fe(OH) ₃	Fe(OH) ₂	
سفید	سفید	سفید	قرمز قهوه‌ای	سبزرنگ	
کاتیون موجود در زنگ آهن (Fe ₂ O ₃)، Fe ³⁺ است.					

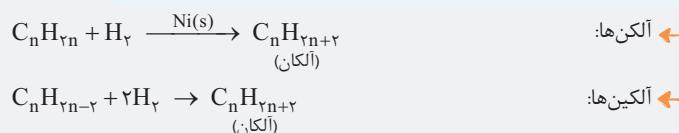
۴) واکنش (I) در شرایط طبیعی انجام‌ناپذیر است و به طور خودبه‌خودی انجام نمی‌شود؛ زیرا واکنش‌پذیری فلز مس (Cu)، کم‌تر از فلز آهن (Fe) بوده و در نتیجه نمی‌تواند جایگزین آهن در ترکیب یونی Fe₂O₃ شود. توجه کنید که در واکنش‌هایی که در شرایط طبیعی انجام‌پذیرند، استفاده از پودر یک ماده به جای تکه‌هایی از آن، به علت افزایش سطح تماس و افزایش سرعت واکنش می‌شود.

تله بله، درسته که وقتی از پودر آهن به جای تکه‌های آهن استفاده کنیم، با افزایش سطح تماس واکنش‌دهنده‌ها، سرعت واکنش می‌تونه زیاد شه! اما حواس‌تو جمع کن که واکنشی انجام نمی‌شه اصلاً که بخواد سرعتش زیاد یا کم شه!

۹۰- گزینه ۲

نکته

واکنش آلکن‌ها و آلکین‌ها با هیدروژن و تبدیل آن‌ها به هیدروکربن‌های سیرشده



گام ۱ فرمول کلی آلکن‌ها به صورت C_nH_{2n} است؛ بنابراین معادله واکنش هیدروژن‌دارشدن آلکن‌ها را می‌توان به صورت مقابل نمایش داد:

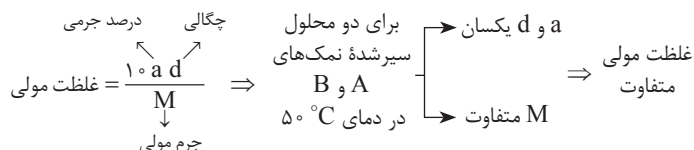
$$\text{C}_n\text{H}_{2n} + \text{H}_2 \xrightarrow{\text{Ni(s)}} \text{C}_n\text{H}_{2n+2}$$

گام ۲ با توجه به مقادیر داده‌شده، به کمک استوکیومتری واکنش، مقدار n را به دست می‌آوریم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{مول}}{\text{جرم مولی}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1}{14n+2} = \frac{198}{(14n+2) \times 1} \Rightarrow 14n+2=198 \Rightarrow 14n=196 \Rightarrow n=14$$

۴) با توجه به نمودار، در دمای ۵۵ °C، ۱۰۰ گرم نمک B در ۱۰۰ گرم آب حل شده است، پس درصد جرمی محلول سیرشده B در این دما برابر با ۵۰٪ است، اما در همین دما، انحلال‌پذیری A کم‌تر از ۱۰۰ گرم است در نتیجه درصد جرمی A کم‌تر از ۵۰٪ خواهد بود. ۴) در این دما، انحلال‌پذیری نمک‌های A و B با هم برابر بوده و در نتیجه درصد جرمی محلول‌های سیرشده آن‌ها با هم برابر است؛ ولی چون جرم مولی این دو ماده با هم برابر نیست، تعداد مول این دو ماده با هم متفاوت بوده و در نتیجه غلظت مولی این دو محلول یکسان نخواهد بود.



۸۷- گزینه ۳

نکته هر محلول از دو جزء حلال و حل‌شونده تشکیل شده است. حلال جزئی از محلول است که حل‌شونده را در خود حل می‌کند و شمار مول‌های آن (نه جرم آن!) بیشتر است. باید تعداد مول ماده مورد نظر از تعداد مول آب بیشتر باشد:

$$\text{H}_2\text{O} \text{ مول } 36 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{18 \text{ g}} = 2 \text{ mol}$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) $\text{CO(NH}_2)_2 \text{ مول } 36 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{60 \text{ g}} = 0.6 \text{ mol}$

۲) $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \text{ مول } 270 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{180 \text{ g}} = 1.5 \text{ mol}$

۳) $\text{CH}_3\text{OH} \text{ مول } 72 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{32 \text{ g}} = 2.25 \text{ mol}$

۴) $\text{C}_2\text{H}_6\text{O} \text{ مول } 29 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{46 \text{ g}} = 0.63 \text{ mol}$

بنابراین با اضافه کردن ۷۲ گرم (۲/۲۵ مول) متانول به ۳۶ گرم (۲ مول) آب، در محلول حاصل، آب حلال نبوده و متانول حلال است.

۸۸- گزینه ۲

نکته برای عنصرهای گروه‌های ۱ تا ۱۲، تعداد الکترون‌های ظرفیتی با شماره گروه و برای عنصرهای گروه‌های ۱۳ تا ۱۸، تعداد الکترون‌های ظرفیتی با عدد یکان شماره گروه عنصر، برابر است. عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند.

عنصرهای گروه ۴ و ۱۴ جدول دوره‌ای، ۴ الکترون ظرفیتی دارند. در ۴ دوره اول (عنصرهایی با عدد اتمی ۱ تا ۳۶)، این عنصرها عبارت‌اند از تیتانیوم (۲۲ Ti) از گروه ۴ و عنصرهای C، Si و Ge از گروه ۱۴.

بررسی عبارت‌ها:

۱) هالوژن‌های دوره‌های دوم و سوم (فلوئور و کلر) به حالت گازند. C در دوره دوم قرار دارد و نافلز است، نه شبه‌فلز!

۲) شمار الکترون‌های ظرفیتی عنصر M کم‌تر از ۴ است، اما همه عنصرهایی که ۱ تا ۳ الکترون ظرفیتی دارند، فلز نیستند؛ به عنوان نمونه، هیدروژن و هلیوم به ترتیب ۱ و ۲ الکترون ظرفیتی دارند، اما نافلز هستند.

۳) در دوره‌های دوم تا چهارم، عنصری نقطه ذوب بالاتری دارد که جامد کووالانسی باشد. عنصرهای C، Si و Ge، جزء جامدهای کووالانسی‌اند و هیچ کدام فلز نیستند.

۴) سومین فلز قلیایی خاکی جدول (عنصرهای گروه ۲)، کلسیم (۲۰ Ca) است. با توجه به روند تغییر شعاع اتمی در جدول دوره‌ای، شعاع اتمی این عنصر از هر ۴ عنصر مورد نظر، بزرگ‌تر است.

گروه ۱۴		گروه ۴		گروه ۲	
C	Si	Ca	Ti		
۶	۱۴	۲۰	۲۲		

افزایش شعاع اتمی

$$\Rightarrow [\text{OH}^-] = \sqrt{K_b \cdot M} = \sqrt{4 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^{-3}} = \sqrt{16 \times 10^{-8}}$$

$$= 4 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{4 \times 10^{-4}} = \frac{1}{4} \times 10^{-10}$$

$$\text{pH} = -\log\left(\frac{1}{4} \times 10^{-10}\right) = 10 - \log \frac{1}{4} = 10 + \log 4 = 10 + 2 \log 2 = 10 + 2 \times 0.3 = 10.6$$

و در نهایت pH آب از ۷ به ۱۰/۶ می‌رسد؛ یعنی ۳/۶ واحد تغییر می‌کند.

۹۳- گزینه ۱

بررسی گزینه‌ها: ۱ اگر در محیطی نور مرئی (نور با طول موج ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر) نباشد، انسان نمی‌تواند پیرامون خود را ببیند.

۲ ماده‌ای که به رنگ سرخ دیده می‌شود؛ یعنی این ماده نور رنگ سرخ را بازتاب کرده یا عبور داده و همه طول موج‌های مرئی، به جز رنگ سرخ را جذب کرده است. از آن جایی که طول موج رنگ سرخ در بازه ۶۲۰ تا ۷۰۰ نانومتر است، بنابراین این ماده همه طول موج‌های مرئی با طول موج کمتر از ۶۲۰ نانومتر را جذب می‌کند.

۳ در گذشته انسان، رنگدانه‌های معدنی و آلی را از منابع طبیعی، مانند گیاهان، جانوران و برخی کانی‌ها تهیه می‌کرد. توجه کنید که کانی‌ها، سرمنشأ تهیه رنگدانه‌های معدنی هستند.

۴ در دما و فشار اتاق، مواد مولکولی می‌توانند گاز (مانند Cl_2)، مایع (مانند Br_2) یا جامد (مانند I_2) باشند.

نکته ۱ اگر یک نمونه ماده، همه طول موج‌های مرئی را بازتاب کند، به رنگ سفید دیده می‌شود. ۲ رسوب‌های نقره کلرید و منیزیم فسفات، سفیدرنگ می‌باشند؛ این به آن معناست که این مواد همه طول موج‌های مرئی را بازتاب می‌کنند و هیچ کدام از این پرتوها را جذب نمی‌کنند. ۳ اگر یک نمونه ماده همه طول موج‌های مرئی را جذب کند، به رنگ سیاه دیده می‌شود. ۴ مواد سیاه‌رنگی، مانند گرافیت و دوده، همه طول موج‌های مرئی را جذب می‌کنند و هیچ کدام از این پرتوها را بازتاب نمی‌کنند. ۵ اگر یک ماده، بخشی از نور سفید تابیده‌شده را جذب و باقی‌مانده آن را عبور دهد یا بازتاب کند، به رنگ پرتوهایی دیده می‌شود که از خود عبور داده یا بازتاب کرده است. ۶ موادی مانند Fe_2O_3 که به رنگ قرمز دیده می‌شود، به جز پرتوهایی قرمز رنگ ناحیه مرئی، سایر طول موج‌های ناحیه مرئی را جذب می‌کند. ۷ سازنده اصلی یک ماده رنگی که به آن رنگ می‌بخشد، رنگ‌دانه نام دارد. برای نمونه TiO_2 ، Fe_2O_3 و دوده از جمله رنگ‌دانه‌های معدنی هستند که به ترتیب رنگ‌های سفید، قرمز و سیاه ایجاد می‌کنند.

۹۴- گزینه ۴

حفاظت کاتدی هنگامی صورت می‌گیرد که فلزی که قرار است از آن محافظت شود، کاتد واقع گردد؛ یعنی اگر بتوان به منظور محافظت کاتدی فلز Y از فلز X استفاده کرد؛ در نتیجه پتانسیل کاهش فلز X کمتر از فلز Y بوده و فلز X نسبت به فلز Y ، کاهنده قوی‌تری است

$$\left\{ \begin{array}{l} E_X^\circ < E_Y^\circ \\ E_X^\circ = +0.36 \text{ V یا } -0.36 \text{ V} \\ E_Y^\circ = +0.72 \text{ V یا } -0.72 \text{ V} \end{array} \right.$$

با توجه به شرط $E_X^\circ < E_Y^\circ$ ، E_Y° نمی‌تواند -0.72 ولت باشد ولی E_X° می‌تواند -0.36 یا $+0.36$ ولت باشد. همچنین اگر با تشکیل یک سلول گالوانی از نیم‌سلول Z و SHE، pH نیم‌سلول SHE افزایش یابد ($[\text{H}^+]$ کاهش یابد)؛ می‌توان نتیجه گرفت که $E^\circ(Z^{2+}/Z)$ کمتر از صفر بوده و نیم‌واکنش اکسایش در آن رخ داده است.

حالا! با توجه به توضیحات داده‌شده، E° نیم‌سلول‌های داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$$E^\circ(X^{2+}/X) = +0.36 \text{ V یا } -0.36 \text{ V}$$

$$E^\circ(Y^{2+}/Y) = +0.72 \text{ V}$$

$$E^\circ(Z^{2+}/Z) = -0.18 \text{ V}$$

بایاید به ترتیب گزینه‌ها را بررسی کنیم:

۱ با توجه به این‌که E_X° می‌تواند ± 0.36 ولت باشد، emf سلول گالوانی $X-Z$ می‌تواند مقادیر 0.18 یا 0.54 ولت باشد:

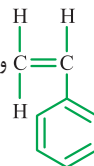
$$\text{emf} = E_{\text{کاتد}}^\circ - E_{\text{اند}}^\circ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ emf} = 0.36 - (-0.18) = 0.54 \text{ V} \\ (2) \text{ emf} = -0.18 - (-0.36) = 0.18 \text{ V} \end{array} \right.$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$\frac{1}{4} \text{ mol C}_n\text{H}_{2n} \times \frac{1 \text{ mol C}_n\text{H}_{2n+2}}{1 \text{ mol C}_n\text{H}_{2n}} \times \frac{(14n+2) \text{ g C}_n\text{H}_{2n+2}}{1 \text{ mol C}_n\text{H}_{2n+2}} = \frac{14n}{4} \text{ g C}_n\text{H}_{2n+2} \Rightarrow 14n+2=14n \Rightarrow 14n=14 \Rightarrow n=1$$

در نتیجه، فرمول مولکولی آلکن مورد نظر به صورت C_4H_8 بوده و در مولکول آن، ۲۸ اتم هیدروژن وجود دارد.

گام ۱ ساختار و فرمول مولکولی استیرن، به ترتیب به صورت C_8H_8 است:



در نتیجه در مولکول آلکن مورد نظر (C_4H_8)، ۶ اتم کربن و ۲۰ اتم هیدروژن، بیشتر از مولکول استیرن وجود دارد و تفاوت جرم مولی این دو ماده برابر با $92 = (20 \times 1) + (6 \times 12)$ گرم است.

۹۱- گزینه ۱

نکته برای محاسبه ΔH یک واکنش با استفاده از آنتالپی‌های سوختن و واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش دهنده‌ها}]$$

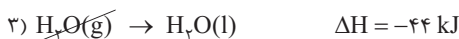
گام ۱ واکنش تشکیل ۱ مول بوتان گازی ($\text{C}_4\text{H}_{10}(\text{g})$) از عناصر سازنده آن (کربن به شکل گرافیت و گاز هیدروژن) را می‌نویسیم.



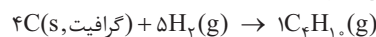
گام ۲ به آنتالپی‌های سوختن گرافیت، گاز هیدروژن و بوتان نیاز داریم.

نکته به آنتالپی واکنشی که در آن ۱ مول ماده در اکسیژن کافی به طور کامل می‌سوزد، آنتالپی سوختن آن ماده می‌گویند. برای محاسبه سوختن ΔH ، حالت فیزیکی همه مواد شرکت‌کننده در واکنش باید حالت فیزیکی آن‌ها در فشار 1 atm و دمای اتاق (25°C) باشد. مثلاً H_2O یکی از فراورده‌های واکنش سوختن کامل ترکیب‌های آلی است. در واکنش مربوط به آنتالپی سوختن ترکیب‌های آلی در دمای اتاق، باید حالت فیزیکی H_2O را به صورت $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ بنویسیم و نه $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$!

با توجه به نکته بالا و اطلاعات داده‌شده در سؤال، باید آنتالپی سوختن گاز هیدروژن را به صورت زیر به دست آوریم:



گام ۳ با داشتن آنتالپی‌های سوختن مواد شرکت‌کننده در واکنش تشکیل بوتان از عناصر سازنده‌اش، ΔH این واکنش را محاسبه می‌کنیم:



$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش دهنده‌ها}] = \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_4\text{H}_{10}) - [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{H}_2) + 4\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C, گرافیت})]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_4\text{H}_{10}) - [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{H}_2) + 4\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C, گرافیت})] = -126 \text{ kJ}$$

۹۲- گزینه ۲

گام ۱ ابتدا حساب می‌کنیم که پس از ۱۰ ثانیه، چند مول NH_3 به آب وارد شده است:

$$\text{NH}_3 \text{ مول} = 10 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{0.48 \text{ mol}}{1 \text{ min}} = 0.08 \text{ mol}$$

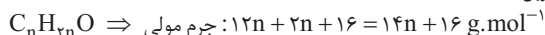
گام ۲ حالا به کمک رابطه ثابت یونش آمونیاک، غلظت مولی یون‌های هیدروکسید و هیدرونیوم و در نهایت pH محلول را به دست می‌آوریم:

$$(M) = \frac{0.08 \text{ mol}}{2 \text{ L}} = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}$$

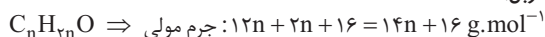
$$K_b = \frac{[\text{OH}^-]^2}{M - [\text{OH}^-]} \approx \frac{[\text{OH}^-]^2}{M}$$



کتون (با n اتم کربن):



آلدئید (با n اتم کربن):



جرم مولی کتون و آلدئید با تعداد کربن برابر، یکسان است؛ پس این گزینه درست است. ✓
 پلی‌استرها از واکنش تراکمی یک دی‌الکل و یک دی‌اسید تشکیل می‌شوند. در این فرایند، گروه‌های هیدروکسیل ($-OH$) از الکل و گروه‌های کربوکسیل ($-COOH$) از اسید با هم ترکیب شده و گروه‌های استری ($-COO-$) را تشکیل می‌دهند و مولکول آب آزاد می‌شود؛ بنابراین در ساختار هر پلی‌استر، حداقل یک گروه هیدروکربنی وجود دارد که از دو طرف به گروه‌های استری متصل است. پس این گزینه درست است. ✓

آمین‌ها می‌توانند سه حالت داشته باشند:

نیتروژن به یک گروه آلکیل و دو هیدروژن متصل است.

نیتروژن به دو گروه آلکیل و یک هیدروژن متصل است.

نیتروژن به سه گروه آلکیل متصل است و هیچ اتم هیدروژنی ندارد؛ پس این گزینه نادرست است. ✗

بچه‌ها حواستون باشه که آمین‌های نوع سوم اصلاً هیدروژن ندارند!

مشاوره در ترکیبات آلی، دانستن فرمول عمومی و گروه‌های عاملی، برای تعیین جرم مولی و پیش‌بینی خواص ترکیب، ضروری است، پس حتماً به جمع‌بندی راجب گروه‌های عاملی و فرمول عمومی آن‌ها داشته باشید.



۹۷- گزینه ۱

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

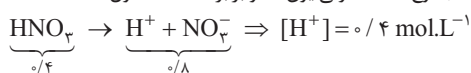
بررسی عبارت‌ها: (الف) نمک ($NaCl$) به هنگام انحلال در آب به صورت یونی حل شده و به طور کامل به یون‌های سازنده خود تبدیل می‌شود، ولی قند ($C_{12}H_{22}O_{11}$) به هنگام انحلال در آب به صورت مولکولی حل شده و هیچ یونی تولید نمی‌کند؛ بنابراین در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی محلول آب‌نمک، بیشتر از محلول آب‌قند است. (ب) از آن‌جا که یون‌های منیزیم با شوینده‌های صابونی تشکیل رسوب می‌دهند، اضافه کردن منیزیم کلرید به این شوینده‌ها باعث کاهش قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها می‌شود. توجه کنید که یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} با شوینده‌های غیرصابونی تشکیل رسوب نداده و در نتیجه بر قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها تأثیری ندارند. (پ) اکسید فلزهایی، مانند لیتیم و باریم، در آب خاصیت بازی داشته و کاغذ pH را به رنگ آبی درمی‌آورند. (ت) واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:

فراورده‌های دیگر + گاز هیدروژن $\Rightarrow$ آب + مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید



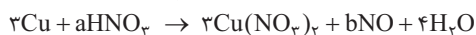
۹۸- گزینه ۲

HNO_3 یک اسید قوی است و در اثر یونش هر مول از آن، دو مول یون تولید می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که در محلول آن، مجموع غلظت مولی یون‌ها دو برابر غلظت محلول است.



$$pH = -\log[H^+] = -\log(4 \times 10^{-1}) = 1 - 2 \log 2 = 1 - (2 \times 0.3) = 0.4$$

برای قسمت دوم سؤال، ابتدا باید موازنه معادله واکنش را کامل کنیم:



در سمت راست معادله، ۸ اتم هیدروژن وجود دارد؛ بنابراین a باید برابر ۸ باشد؛ به این ترتیب در سمت چپ معادله، ۸ اتم نیتروژن وجود دارد و b باید برابر ۲ باشد تا در سمت راست نیز، ۸ اتم نیتروژن داشته باشیم: $3Cu + 8HNO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O$

مشاوره واکنش داده‌شده در این تست، یکی از واکنش‌هایی که خیلی تو کنکور اومده! معادله این واکنش به روش واریسی موازنه نمی‌شه و باید به روش ضریب مجهول حل بشه! موازنه معادله این واکنش رو به عنوان یه واکنش رایج کنکور یاد بگیرید.

غلظت مولار Cu^{2+} با غلظت مولار $Cu(NO_3)_2$ برابر است و داریم:

$$\frac{\text{جرم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.4 \times 5\%}{8} = \frac{x \times 5\%}{3}$$

$$\Rightarrow x = [Cu(NO_3)_2] = [Cu^{2+}] = \frac{3 \times 0.4}{8} = 0.15 \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به این که E_X° می‌تواند ± 0.36 ولت باشد؛ بنابراین قدرت کاهندگی X می‌تواند کم‌تر و یا بیشتر از H_2 باشد و این جمله را نمی‌توان به یقین درست دانست!

نکته فلزهایی با E° مثبت، با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهند! از آن‌جا که E_Y° همواره بیشتر از E_X° است؛ در نتیجه می‌شه به منظور نگهداری محلول‌های دارای یون‌های X^{2+} ، از ظرفی از جنس فلز Y استفاده کرد.

نکته محلول نمک یا کاتیون یک فلز را می‌توان در ظرفی از جنس فلز بالاتر در سری الکتروشیمیایی (دارای E° بزرگ‌تر) نگهداری کرد؛ زیرا فلز بالاتر (با E° بزرگ‌تر) نمی‌تواند با کاتیون فلز پایین‌تر (با E° کوچک‌تر) واکنش دهد. به طور مثال محلول منیزیم نیترات را می‌توان در ظرف آهنی نگهداری کرد در حالی که محلول مس (II) نیترات را نه!

فلز Z نسبت به فلز Y، کاهنده قوی‌تری است؛ در نتیجه واکنش $Z(s) + Y^{2+}(aq) \rightarrow \dots$ به صورت طبیعی و خودبه‌خودی انجام خواهد گرفت، در حالی که چون فلز Y نسبت به فلز X، کاهنده ضعیف‌تری است؛ در نتیجه واکنش $Y(s) + X^{2+}(aq) \rightarrow \dots$ به صورت طبیعی و خودبه‌خودی انجام‌ناپذیر است.



۹۵- گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها: ۱) pH محلول (a) که حاوی یک باز قوی است را می‌توان به طور دقیق محاسبه کرد اما در محلول (b) اسید ضعیف وجود دارد و بدون داشتن ثابت یونش یا درجه یونش اسید، نمی‌توان pH محلول را محاسبه کرد.

۲) pH یک محلول به غلظت آن بستگی دارد و نه به حجم آن! محلول ۰/۲ مولار NaOH با هر حجمی، یک pH مشخص دارد.

۳) ثابت یونش فقط به دما بستگی دارد اما دقت کنید که درجه یونش اسیدها و بازهای ضعیف به غلظت محلول نیز وابسته است. در این‌جا با اضافه کردن آب و رقیق شدن محلول، درجه یونش استیک اسید افزایش می‌یابد.

۴) در محلول ۰/۲ مولار NaOH، غلظت یون هیدروکسید برابر ۰/۲ مولار است. از طرفی هیدروکلریک اسید (HCl)، یک اسید قوی است و غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۴ مولار آن برابر ۰/۴ مولار است؛ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{0.4} = \frac{1}{4} \times 10^{-13}$$

$$\frac{[OH^-](NaOH)}{[OH^-](HCl)} = \frac{0.2 \times 10^{-1}}{\frac{1}{4} \times 10^{-13}} = 8 \times 10^{12}$$



۹۶- گزینه ۴

درس‌نامه

آلدئید: ترکیبی آلی با گروه عاملی آلدئیدی ($-C(=O)H$) در انتهای زنجیر کربنی؛ فرمول عمومی: $C_nH_{2n}O$.

کتون: ترکیبی آلی با گروه عاملی کربونیل ($C=O$) در میان زنجیر کربنی؛ فرمول عمومی: $C_nH_{2n}O$.

اتر: ترکیبی آلی با گروه عاملی اتری ($-O-$) در بین زنجیر کربنی؛ فرمول عمومی (برای اترهای سیرشده): $C_nH_{2n+2}O$.

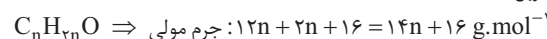
پلی‌استر: پلیمری که در زنجیر اصلی آن، گروه‌های عاملی استری ($-COO-$) تکرار می‌شوند. آمین: ترکیبی آلی با فرمول ($R-NH-R'$) که گروه‌های R و R'، گروه آلکیل یا

اتم H هستند (هر سه گروه نمی‌توانند H باشند).

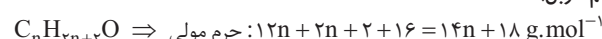
بررسی گزینه‌ها:

۱

آلدئید (با n اتم کربن):



اتر (با n اتم کربن):

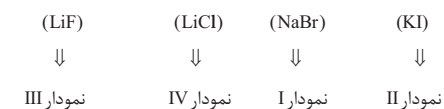


جرم مولی آلدئید کم‌تر از جرم مولی اتر است؛ پس این گزینه درست است. ✓

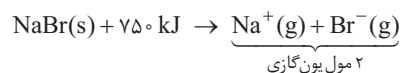
با توجه به نمودار قبل، مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های داده‌شده به صورت مقابل است:

مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های یونی:

یتاسیم یدید > سدیم برمید > لیتیم کلرید > لیتیم فلوئورید

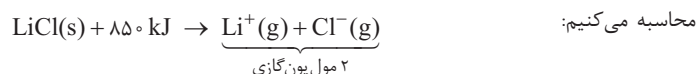


با توجه به توضیحات داده‌شده، ۲ و ۳ رد می‌شوند و پاسخ درست یکی از ۱ و ۴ است؛ بنابراین ابتدا برای بررسی ۱، مقدار گرمای مورد نیاز برای تولید ۴/۰ مول یون‌های گازی از فروپاشی شبکه بلور ترکیب NaBr را به دست می‌آوریم:



$$\text{یون های گازی حاصل از فروپاشی } \frac{1}{4} \text{ mol} \times \frac{75.0 \text{ kJ}}{2 \text{ mol از فروپاشی}} = 15.0 \text{ kJ} \quad \times$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که ① غلط است. در نهایت برای بررسی ④، مقدار گرمای مورد نیاز برای تولید ۴/۰ مول یون‌های گازی از فروپاشی شبکه بلور ترکیب LiCl را

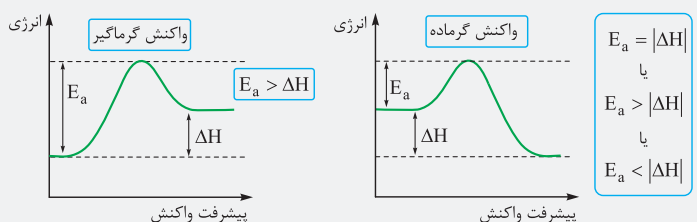


$$\frac{85 \text{ kJ}}{2 \text{ mol}} \times \frac{4 \text{ mol}}{1} = 170 \text{ kJ} \checkmark$$

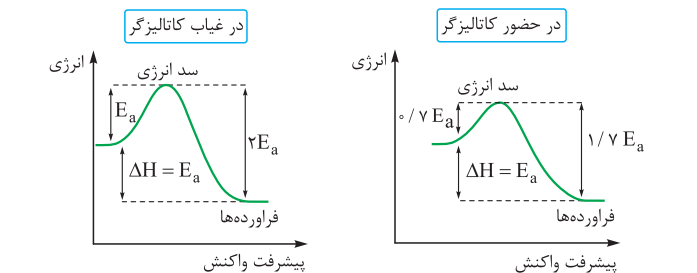
تله توجه کنین که در این مسئله، مقدار انرژی مورد نیاز برای تولید $\frac{1}{4}$ / مول یون گازی (نه تجزیه $\frac{1}{4}$ / مول ترکیب یونی) رو خواسته! اگر مقدار انرژی مورد نیاز برای تجزیه $\frac{1}{4}$ / مول ترکیب یونی رو به دست می‌آوردی، جواب می‌شد ①! پس حواست به خواسته مسئله باشه!

۱۰۱- گزینه ۲

نکته در واکنش‌های گرماگیر ($\Delta H > 0$)، انرژی فعال‌سازی (E_a) از ΔH واکنش بیشتر است، اما در واکنش‌های گرماده ($\Delta H < 0$)، انرژی فعال‌سازی (E_a) می‌تواند با قدرمطلق ΔH واکنش برابر، از آن بیشتر یا کمتر باشد.



با توجه به این که مقدار عددی انرژی فعال سازی واکنش با آنتالپی آن برابر است، نتیجه می گیریم که واکنش مورد نظر گرماده است.



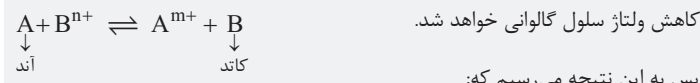
با توجه به کاهش ۳۰ درصدی انرژی فعال سازی (E_a)، فاصله سطح انرژی فرآورده‌ها تا سد انرژی، از $2E_a$ به $1/7E_a$ رسیده است:

$$\text{درصد کاهش} = \frac{\text{مقدار کاهش}}{\text{مقدار اولیه}} \times 100 = \frac{2E_a - 1/\sqrt{E_a}}{2E_a} \times 100 = \frac{0.3}{2} \times 100 = 15\%$$

تله دقت کنین که اگر به جای فرآورده‌ها، به اشتباه درصد کاهش فاصله سطح انرژی واکتشدونده‌ها تا سد انرژی (همون درصد کاهش E_a می‌شه!) رو محاسبه می‌کردی یا درصد کاهش این‌ها رو برابر هم در نظر می‌گرفتی، به اشتباه پاسخ رو ۳۰٪ به دست می‌آوردی که اتفاقاً در گزینیه‌ها هم هست!

۹۹- گزینه ۳

درسنامه در سلول‌های گالوانی، هر عاملی که واکنش را در جهت رفت (به سمت راست) جابه‌جا کند، باعث می‌شود که سلول بهتر کار کرده و ولتاژ آن افزایش یابد. از طرف دیگر، هر عاملی که باعث جابه‌جایی واکنش در جهت برگشت (به سمت چپ) شود، موجب کاهش ولتاژ سلول گالوانی خواهد شد.

$$A + B^{n+} \rightleftharpoons A^{m+} + B$$


یس به این نتیجہ می‌رسیم کہ:

① هر چه غلظت کاتیون مربوط به نیم‌سلول کاتد (در این‌جا B^{n+}) افزایش یابد، طبق اصل لوشاتلیه تعادل بیشتر به سمت راست جابه‌جا شده و ولتاژ سلول افزایش می‌یابد؛ در حالی که با کاهش غلظت این کاتیون، طبق اصل لوشاتلیه تعادل بیشتر به سمت چپ جابه‌جا شده و ولتاژ سلول کاهش می‌یابد.

افزایش غلظت کاتیون (الکترولیت) در نیم سلول کاتد ← افزایش ولتاژ سلول

کاهش غلظت کاتیون (الکترولیت) در نیم سلول کاتد ← کاهش ولتاژ سلول

۲) هر چه غلظت کاتیون مربوط به نیم سلول آند (در این جا A^{m+}) افزایش یابد، طبق اصل لوشاتالیه تعادل به سمت چپ جابه‌جا شده و ولتاژ سلول کاهش می‌یابد؛ در حالی که با کاهش غلظت این کاتیون، تعادل بیشتر به سمت راست جابه‌جا شده و ولتاژ سلول افزایش می‌یابد.

افزایش غلظت کاتیون (الکترولیت) در نیم سلول آند ← کاهش ولتاژ سلول

کاهش غلظت کاتیون (الکترولیت) در نیم سلول آند ← افزایش ولتاژ سلول

فلاصحه (اینکه) در یک سلول گالوانی، هرچه غلظت الکترولیت کاتد بیشتر و غلظت الکترولیت آنود کمتر باشد، ولتاژ سلول بیشتر خواهد شد.

به طور کلی در یک سلول گالوانی، با کاهش غلظت کاتیون (الکترولیت) در نیم‌سلول کاتد، ولتاژ سلول کاهش می‌یابد. در این جا Cu کاتد است و کاهش غلظت مس (II)، سولفات (الکترولیت نیم‌سلول کاتد) موجب کاهش ولتاژ سلول می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) Mg در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از Zn (Mg) کاهنده‌تر از Zn است. قرار دارد؛ بنابراین ولتاژ سلول $Mg - Cu$ نسبت به ولتاژ سلول $Zn - Cu$ بیشتر است (هر چه فاصله دو عنصر در سری الکتروشیمیایی بیشتر باشد، سلول حاصل ولتاژ بیشتری خواهد داشت). ۲) Ag در سری الکتروشیمیایی بالاتر از Cu قرار دارد (Ag^+ اکسندۀ تر از Cu^{2+} است)؛ بنابراین ولتاژ سلول $Zn - Ag$ نسبت به ولتاژ سلول $Zn - Cu$ بیشتر است. ۴) با کاهش غلظت الکترولیت نیم‌سلول آند (در این‌جا روی سولفات) ولتاژ سلول افزایش می‌یابد.

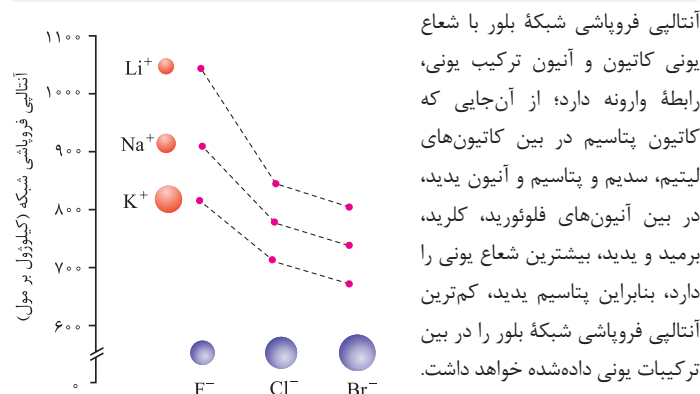
۱۰۰ - گزینه ۴

درس نامه مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های یونی

اولویت اول: هر چه «بار کاتیون + اندازه بار آنیون» بزرگتر ΔH بیشتر

♦ اولویت دوم: هر چه شعاع یونها کوچکتر ΔH فروپاشی بیشتر

جمع‌بندی ۱: انرژی فروپاشی شبکه با بار کاتیون و آنیون **رابطه مستقیم** دارد. ۲ انرژی فروپاشی شبکه با شعاع کاتیون و آنیون **رابطه عکس** دارد.



۱۰۲ - گزینه ۳

با توجه به معادله واکنش داریم:

$$A \rightleftharpoons B + C$$

مقدار مول تعادل اولیه: $1-x$ x x

$$K = \frac{[B][C]}{[A]} \Rightarrow 0.1 = \frac{\frac{x}{0.5} \times \frac{x}{0.5}}{\frac{1-x}{0.5}} \Rightarrow 0.1 = \frac{x^2 \times \cancel{0.5}}{(1-x)(\cancel{0.5})}$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 0.1 - 0.1x \Rightarrow 2x^2 + 0.1x - 0.1 = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-0.1 \pm \sqrt{(0.1)^2 - 4(2)(-0.1)}}{2(2)} = \frac{-0.1 \pm 0.9}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -0.25 \text{ غلط} \\ x_2 = 0.2 \checkmark \end{cases}$$

 مقدار یا غلظت مصرف‌شده = بازده درصدی واکنش در حالت بسته‌بودن شیر
مقدار یا غلظت آغازی

$$= \frac{x}{1} \times 100 = \frac{0.2}{1} \times 100 = 20\%$$

با بازکردن شیر و افزایش حجم، واکنش در جهت رفت جابه‌جا می‌شود:

$$A \rightleftharpoons B + C$$

مقدار مول تعادل ثانویه: $0.8-x$ $0.2+x$ $0.2+x$

بازده درصدی واکنش پس از بازکردن شیر

بازده درصدی واکنش در حالت بسته‌بودن شیر

$$= 2/5 \times 20 = 8\%$$

 مقدار یا غلظت مصرف‌شده = بازده درصدی واکنش پس از بازکردن شیر
مقدار یا غلظت آغازی

$$\Rightarrow 50 = \frac{x}{0.8} \times 100 \Rightarrow x = 0.4$$

چون دما تغییر نکرده، پس ثابت تعادل همان ۰/۱ خواهد بود:

$$K = \frac{[B][C]}{[A]} \Rightarrow 0.1 = \frac{(\frac{0.2+x}{V})(\frac{0.2+x}{V})}{(\frac{0.8-x}{V})}$$

$$\Rightarrow 0.1 = \frac{(\frac{0.6}{V})^2}{(\frac{0.4}{V})} \Rightarrow 0.1 = \frac{0.36 \times V}{0.4 \times V^2} \Rightarrow 0.36 = 0.4V \Rightarrow V = 0.9 \text{ L}$$

تله بچه‌ها مراقب باشید این ۹ لیتر مجموع حجم ظرف (I) و (II) است، پس حجم ظرف (II) برابر با $9 - 0.5 = 8.5 \text{ L}$ می‌باشد. اگر حجم ظرف (I) رو از حجم کل ۹ لیتر کم نکنی تو دام تست می‌افتی و به ۴ می‌رسی.

۱۰۳ - گزینه ۱

نکته برای سریع‌تر شدن محاسبات جرم اتمی میانگین، می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\bar{M} = M_1 + \frac{F_1}{100}(M_2 - M_1) + \frac{F_2}{100}(M_3 - M_2) + \dots$$

درصد فراوانی ایزوتوپ ۳ درصد فراوانی ایزوتوپ ۲
 اختلاف جرم اختلاف جرم جرم اتمی
 ایزوتوپ ۳ و ایزوتوپ ۲ ایزوتوپ ۲ و ایزوتوپ سبک‌تر ایزوتوپ سبک‌تر

 در مخلوط غنی‌سازی شده، جرم اتمی میانگین عنصر اورانیم، $237/4$ است؛ در نتیجه فراوانی دو ایزوتوپ (^{238}U و ^{235}U) سازنده این مخلوط برابر خواهد بود با:

$$237/4 = 235 + \frac{F_2}{100}(238 - 235) \Rightarrow \frac{F_2}{100} = 0.8 \Rightarrow F_2 = 80\%, F_1 = 20\%$$

 فراوانی اورانیم - ^{235}U در مخلوط طبیعی، برابر 0.7% است؛ در نتیجه درصد فراوانی این ایزوتوپ در مخلوط غنی‌سازی شده، $19/3 = 63.3\%$ واحد افزایش یافته است.

 در ارتباط با قسمت دوم سؤال، جرم اتمی میانگین عنصر اورانیم را در مخلوط طبیعی این عنصر (حالت اول) که درصد فراوانی ایزوتوپ‌های ^{238}U و ^{235}U در آن به ترتیب برابر $99/3$ و 0.7 است، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{M} = 235 + \frac{99/3}{100} \times (238 - 235) = 237/979 \text{ amu}$$

بنابراین، تفاوت جرم اتمی میانگین عنصر اورانیم در مخلوط طبیعی (حالت اول) و حالت دوم برابر خواهد بود با:

$$237/979 - 237/4 = 0.579 \text{ amu}$$

۱۰۴ - گزینه ۱

اطلاعات داده‌شده در مورد کلرواتان (فصل ۴ دوازدهم) و هیدروژن فلوئورید (فصل ۳ دهم) درست است.

بررسی موارد نادرست:

♦ در فصل ۳ شیمی یازدهم می‌خوانیم که C_2F_6 (تترافلوئورو اتن) به حالت گاز است نه مایع!

♦ هگزان یک آلکان ۶ کربنه بوده و فرمول آن، C_6H_{14} است.

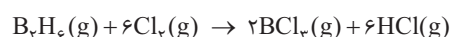
♦ در فصل ۳ دوازدهم می‌خوانیم که فرمول مولکولی کلروفرم به صورت CHCl_3 است نه CH_3Cl !

♦ کوارتز همان سیلیس خالص بوده و فرمول شیمیایی آن، SiO_2 است نه Si !

۱۰۵ - گزینه ۱

استراتژی ابتدا معادله واکنش را موازنه کن و بعد جدول تغییرات تعداد مول مواد رو بکش! با توجه به مجموع شمار مول گازها، مقدار مول مصرف‌شده B_2H_6 را به دست بیار و بعد به کمک سرعت واکنش، زمان مورد نیاز برای مصرف شدن این مقدار B_2H_6 را حساب کن! برای قسمت دوم سؤال هم، به کمک سرعت واکنش حساب کن که برای مصرف مقدار باقی‌مانده B_2H_6 ، چند ثانیه دیگر زمان لازم است.

گام ۱ معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر است:



گام ۲ به کمک ضرایب استوکیومتری مواد در معادله واکنش، جدول تغییرات تعداد مول مواد را رسم کرده و مقدار مصرف‌شده B_2H_6 را حساب می‌کنیم:

	$\text{B}_2\text{H}_6 + 6\text{Cl}_2 \rightarrow 2\text{BCl}_3 + 6\text{HCl}$			
مقدار اولیه	۰/۱	۰/۶	۰	۰
مقدار ثانویه	$0.1-x$	$0.6-6x$	$2x$	$6x$

$$\text{مجموع شمار مول‌های مواد} = (0.1-x) + (0.6-6x) + 2x + 6x$$

$$= 0.7 + x \Rightarrow 0.7 + x = 0.72 \Rightarrow x = 0.02$$

گام ۳ حساب می‌کنیم چه قدر زمان نیاز است تا 0.02 مول B_2H_6 مصرف شود. با توجه به این که ضریب B_2H_6 برابر ۱ است، سرعت متوسط واکنش با سرعت متوسط مصرف B_2H_6 برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{R}(\text{B}_2\text{H}_6) = 0.04 \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{min}} \times 0.5 \text{ L} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{1}{3000} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{R} = \left| \frac{\Delta n}{\Delta t} \right| \Rightarrow \frac{1}{3000} = \frac{0.02}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 0.02 \times 3000 = 60 \text{ s}$$

گام ۴ تا زمان $t = 60 \text{ s}$ ، $0.1 - 0.02 = 0.08$ مول B_2H_6 در ظرف واکنش باقی مانده است. با توجه به سرعت مصرف آن، حساب می‌کنیم چند ثانیه زمان لازم است تا این 0.08 مول مصرف شود:

$$\frac{1}{3000} = \frac{0.08}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 0.08 \times 3000 = 240 \text{ s}$$